

# МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В R- ФУНКЦИОНАЛЬНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

**А.В. Толук**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: tolok\_61@mail.ru

**Н.Б. Толук**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: nat\_tolok@mail.ru

**Ключевые слова:** Метрика, метрическое пространство, R-функциональное моделирование, R-функция, локальная компьютерная геометрия, формообразующий закон.

**Аннотация:** В работе рассматриваются принципы организации метрических задач для геометрии, описанной аналитическим способом непараметрической функцией, используемой в R-функциональном моделировании. В этом случае геометрический объект существует на заданной области и выделяет свою границу множеством точек с нулевым значением. Область в целом описывает формообразующий закон с положительными значениями внутри геометрического объекта и отрицательными снаружи. В R-функциональном моделировании под метрикой предлагается понимать вектор расстояния от рассматриваемой точки на заданной области функции до ближайшей точки нулевой границы R-функционального геометрического объекта. Рассматривается математический аппарат получения метрики в выбранной точке на области с определением направления к нулевой границе ближайшего объекта. Рассмотрен пример построения формообразующего закона, позволяющего решать метрические задачи на примере выпуклого контура.

## 1. Введение

В R-функциональном моделировании под метрикой предлагается понимать *вектор расстояния* от рассматриваемой точки  $x$  на заданной области функции до ближайшей точки нулевой границы R-функционального геометрического объекта  $y$ .

Если обратиться к математической энциклопедии, то определение метрического пространства звучит следующим образом: *Пара  $(M, d)$ , состоящая из множества  $M$  и функции  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  из его декартового квадрата в множество неотрицательных вещественных чисел, называется метрическим пространством, если:*

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (аксиома тождества);
2.  $d(x, y) \geq 0$  (аксиома положительности);
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  (аксиома симметричности);
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (аксиома треугольника);

В нашем случае, множество  $M$  разбито на подмножества точек  $X$ , объединяемых свойством, единой направленности вектора расстояния  $\vec{d}$ .

Принимая за  $y$  точку нулевой границы  $R$ -функции на множестве  $M \times M$  можно определить единственное множество точек  $X(x \in X)$  принадлежащих прямой, совпадающей с вектором  $\vec{d}$  и проходящей через точку  $y$ . Для каждой точки  $x$  на множестве  $M \times M$  всегда существует точка  $y$  по направлению вектора  $\vec{d}$ .

Рассмотрим как выполняются свойства метрического пространства на множестве  $X$ :

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (аксиома тождества). Выполняется, поскольку в этом случае точка  $x$  совпадает с точкой  $y$ ;
2.  $d(x, y) \geq 0$  (аксиома положительности). Выполняется, поскольку речь идёт о модуле вектора  $|\vec{d}|$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  (аксиома симметричности). Так же выполняется по модулю;
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (аксиома треугольника). Поскольку все точки подмножества  $X$  лежат на одной прямой, то правило работает для вырожденного треугольника, т.е.  $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ ;

Для организации такого метрического пространства необходимо сформулировать некоторые принципы, позволяющие находить параметры вектора расстояния в каждой точке на задаваемой области функции.

## 2. Организация линейного метрического пространства

Для дальнейшего исследования  $R$ -функции будем использовать метод функционально-воксельного моделирования (ФВМ) [2, 3], позволяющий привести к наглядности основные характерные данные о форме поверхности.

В работах В. Л. Рвачёва и Максименко-Шейко К.В. [4]  $R$ -функциональное моделирование плоской многоугольной области  $\Omega$ , ограниченной выпуклым  $n$ -угольником, предлагается представлять суперпозицией функций полуплоскостей. Каждая полуплоскость представляет собой ориентированное уравнение прямой, проходящей через две точки (рис. 1а):

$$(1) \quad \Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_i,$$

где уравнение прямой  $\omega$  представлено формулой:

$$(2) \quad \omega(x, y) = x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Аналогично для описания внешней области  $n$ -угольника (рис. 1б) теоретико-множественная операция примет вид:

$$(3) \quad \Omega = \omega_1 \vee \omega_2 \vee \dots \vee \omega_i \vee \dots \vee \omega_n.$$

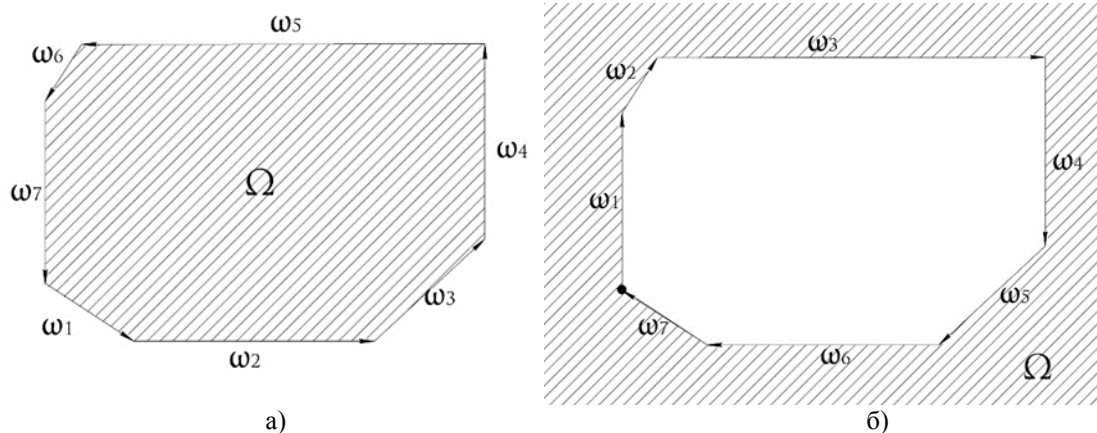
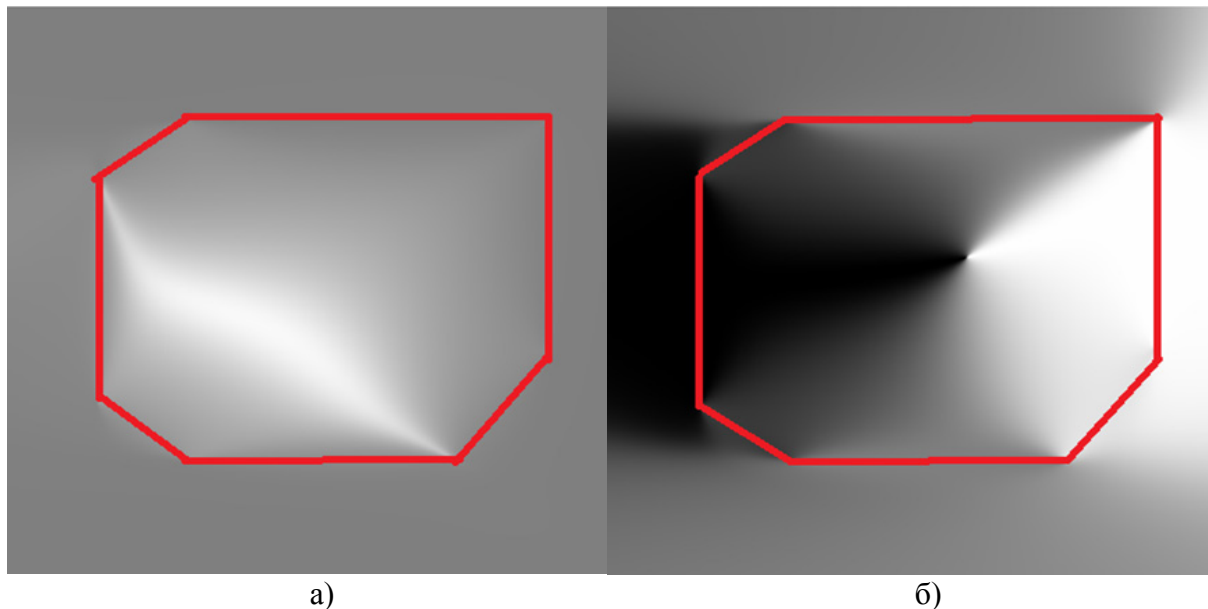


Рис. 1. Описание внутренней (а) и внешней (б) области выпуклого  $n$ -угольника.

Причем ориентация последовательности точек на прямой определяет направление обхода контура.

На рис. 2 изображены образы, полученные функционально-восьельным подходом, позволяющие наглядно оценить сформированную поверхность получаемой суперпозиции функции  $\Omega$ .



**Рис. 2.** Формообразование поверхности  $\Omega$ : а) отклонение нормали от оси  $Oz$ ; б) отклонение нормали от оси  $Ox$  в плоскости  $xOy$ .

На рис. 2а наблюдается зависимость формы поверхности от длины и положения отрезков формообразующего контура функции  $\Omega$ . Рис. 2б демонстрирует экстремальную точку формообразующей поверхности, значительно смещённую от геометрического центра фигуры.

Также следует отметить отсутствие линейности полученной поверхности формообразующего закона, поскольку применяется квадратичный закон пересечения полупространств:

$$(4) \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Учитывая, что в поставленной задаче закон построения формообразующей поверхности предпочтительно иметь линейный, для процедуры R-пересечения (R-объединения) используем соответственно функции вида:

$$(5) \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - |\omega_1 - \omega_2|,$$

$$(6) \quad \omega_1 \vee \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 + |\omega_1 - \omega_2|.$$

На рис. 3 демонстрируется полученный вид многогранной поверхности, образуемой суперпозицией функции  $\Omega$  с применением функции (5).

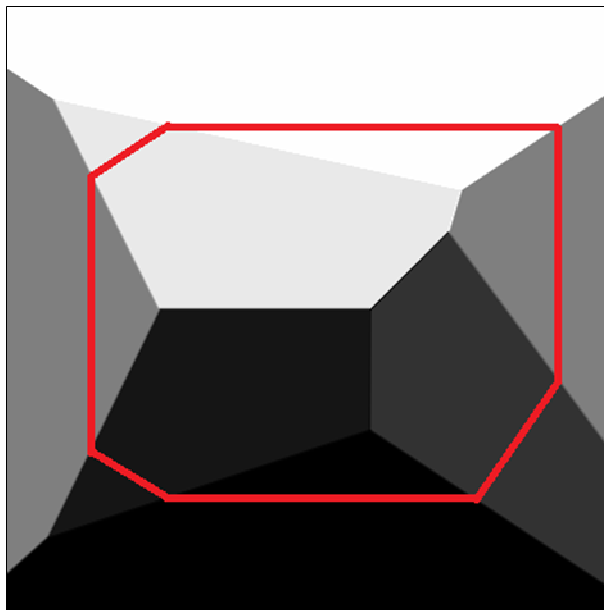


Рис. 3. Формообразование поверхности  $\Omega$  с применением функции (5).

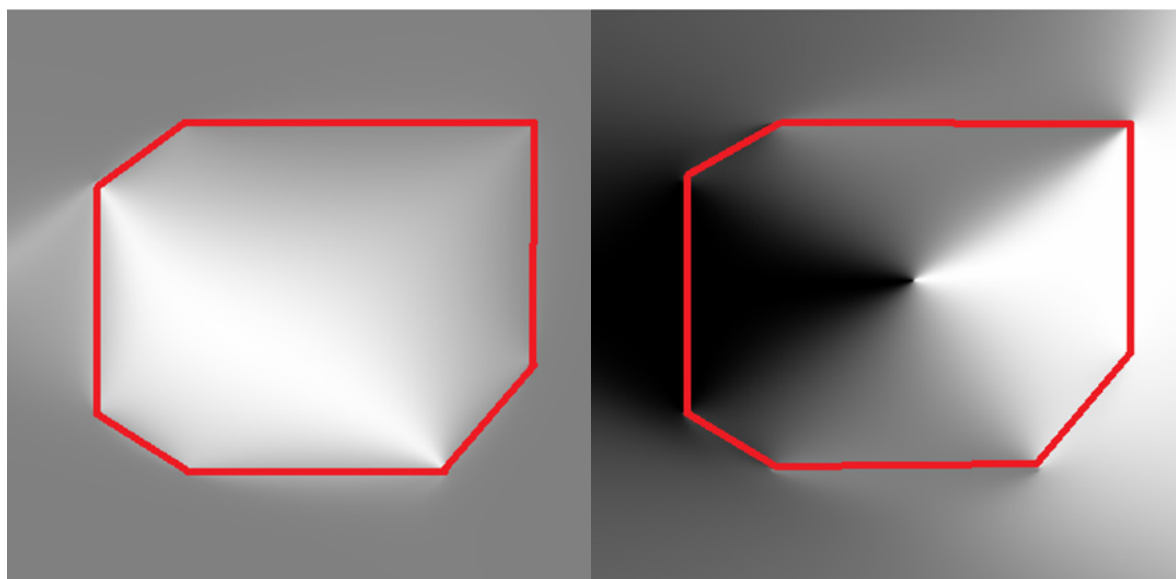
Из рисунка видно, что полученные плоские грани (организующие поверхность) в нулевом уровне сечения по оси  $Oz$  формируют границу в виде искомого контура. Однако геометрически задачу скорейшего спуска к ближайшей границе они явно не решают.

В работе [4] В.Л. Рвачёвым дополнительно было введено понятие нормальной ориентированной прямой проходящей через две точки, уравнение которой получаем путем деления уравнения (2) на расстояние между этими точками:

$$(7) \quad \omega(x, y) = \frac{x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - y_1 x_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Действительно, нормирование сегментов контура принципиально влияет на поведение рельефа на всей рассматриваемой области. На рис. 4 (по аналогии с рисунком 2) изображены два образа, но теперь нормированного контура с применением формулы (7). Как видно экстремум функции смещается к центру фигуры контура и поверхность приобретает более равномерно распределённую форму.

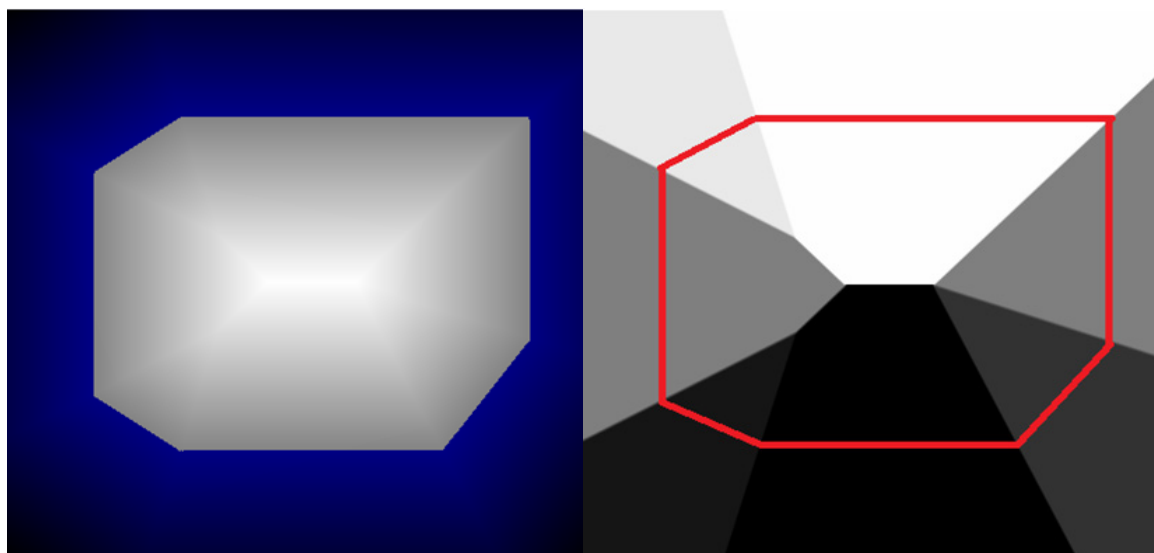
Приведя нормированную закономерность нашей суперпозиции к линейному виду, используя функцию (7) получим поверхность, отображённую на рис. 5. Судя по полученным изображениям можно предположить, что цель моделирования линейного метрического пространства достигнута и каждая точка, расположенная внутри или снаружи контура наклоном соответствующей плоской грани будет направлена к ближайшей границе.



а)

б)

**Рис. 4.** Формообразование поверхности  $\Omega$  с применением функции (7): а) отклонение нормали от оси  $Oz$ ; б) отклонение нормали от оси  $Ox$  в плоскости  $xOy$ .



а)

б)

**Рис. 5.** Формообразование поверхности  $\Omega$  с применением функции (1.53): а) высотное нормирование цветом; б) отклонение нормали от оси  $Oy$  в плоскости  $xOy$ .

### 3. Решение задачи определения расстояния до ближайшего объекта

Убедившись в корректности создаваемой области значений сформулированной суперпозиции с применением нормированных отрезков и линейного закона пересечения можно с уверенностью приступать к вычислению метрического вектора, определяющего направление и величину до ближайшей нулевой границы контура.

Выберем точку на области с координатами  $(x_1, y_1)$ . Координату  $z_1$  получим из расчёта полученной суперпозиции

$$(8) \quad z_1 = \Omega(x_1, y_1).$$

Для определения наклона площадки в окрестности выбранной точки рассмотрим дополнительные ближайшие точки  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$  и вычислим их  $-$ координату

$$(9) \quad z_2 = \Omega(x_2, y_2), z_3 = \Omega(x_3, y_3).$$

Используя определитель сформируем закон для нулевых значений на плоскости, проходящей через три заданные точки

$$(10) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = ax + by + cz + d = 0.$$

Получив коэффициенты  $a, b, c, d$  рассмотрим первых три  $a, b, c$ , отвечающих за отклонение градиентного вектора от осей системы координат  $Oxyz$ . Нормирование по длине трёхмерного вектора градиента получим косинусы углов отклонения единичного вектора от осей. При этом для первых двух компонент единичный вектор спроецирован на плоскость  $xOy$ :

$$(11) \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Поскольку полученный вектор градиента направлен на максимальное возрастание функции, то компоненты  $\cos\alpha, \cos\beta$  определяют это направление. Рассмотрим сечение, выполненное через точку  $(x_1, y_1)$  в этом направлении (см. рис. 6).

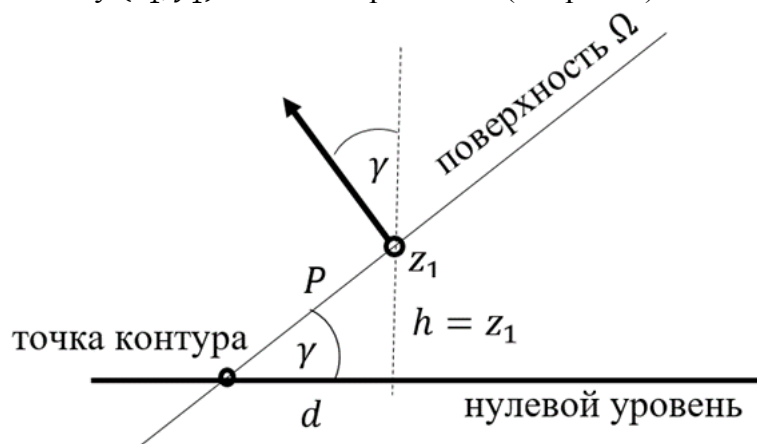


Рис. 6. Схема определения расстояния  $d$ .

На рис. 6 видно, что расстояние  $d$  от точки  $(x_1, y_1, z_1)$  до точки нулевого контура вычисляется через угол отклонения от оси  $Oz$  т.е.  $\cos\gamma$ :

$$(12) \quad d = \left( \frac{z_1}{\sqrt{1-\cos^2\gamma}} \right) \cos\gamma.$$

Как можно наблюдать расстояние  $d$  зависит от высотной отметки  $z_1$  и угловой скорости возрастания функции  $\cos\gamma$ .

На рис. 7 представлен метрический вектор, полученный в точке  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ , где  $\cos\alpha = 0$ , а  $\cos\beta = 1$ .

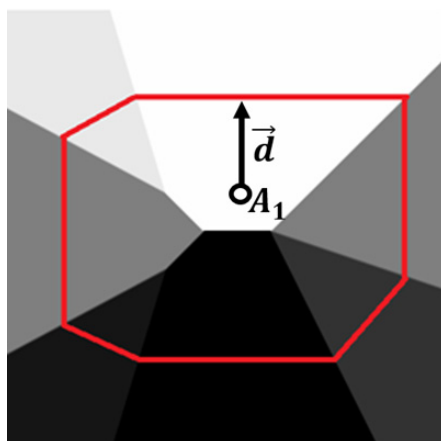


Рис. 7. Определение направления метрического вектора  $\vec{d}$ .

На рис. 8 представлены примеры определения кратчайшего отрезка к нулевой границе контура, полученные в результате реализации предложенного математического аппарата.

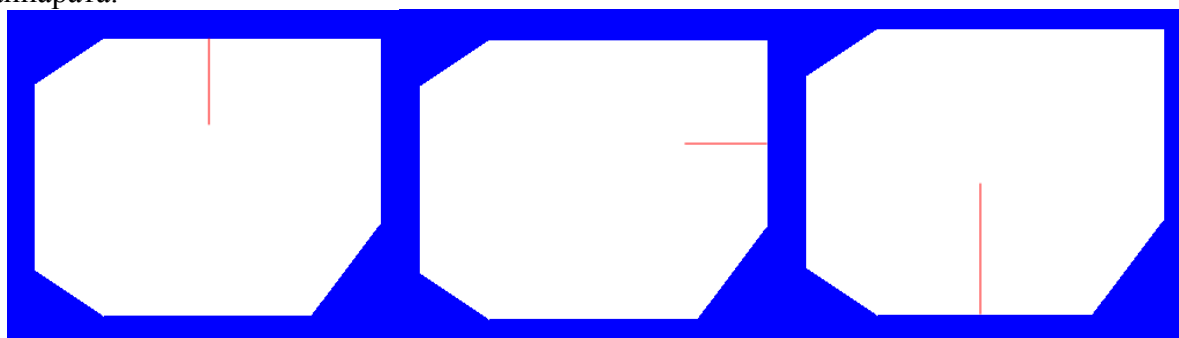


Рис. 8. Примеры реализации математического аппарата.

## 4. Заключение

Метрика, образуемая на векторной основе, позволяет не только контролировать расстояние до ближайшего объекта, но и определять направления оперативного обхода такого препятствия по ортогональному вектору. Не сложно представить, что метрические значения расстояний позволяют организовать метрическое пространство на заданной области, формируя полезные данные для решения различных игровых задач в мультиагентной среде. Следует отметить так же, что время работы алгоритма никак не зависит от сложности геометрии исследуемого объекта.

Исследование выполнено в рамках научной программы национального центра физики и математики, направление №9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах».

## Список литературы

1. Большая российская энциклопедия. Метрическое пространство [электронный ресурс] <https://bigenc.ru/c/metricheskoe-prostranstvo-c40800>.
2. Толоч А.В. Локальная компьютерная геометрия. М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. 147 с.
3. Толоч А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. М.: Физматлит, 2016. 112 с.
4. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
5. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей: монография. Харьков: Изд-во ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.