УДК 519.854.2

ОБ ОДНОЙ ЭВРИСТИКЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА ПЛОСКОСТИ

С.А. Красоткин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: semen.krassotkin@gmail.com

Ключевые слова: задача коммивояжера, дискретная оптимизация, метод попарных сравнений, эвристики, задача коммивояжера на плоскости

Аннотация: Задача коммивояжёра — это задача дискретной оптимизации, в которой необходимо определить кратчайший путь обхода всех вершин, посещая каждый только один раз. В общем случае, эта задача является NP-трудной и не имеет полиномиального алгоритма. Однако существуют специальные случаи, для которых можно найти оптимальное решение за полиномиальное время. В работе рассматривается специальный случай, когда все вершины расположены на евклидовой плоскости и образуют границу выпуклого многоугольника. На его основе разработана эвристика для задачи коммивояжёра на плоскости, изучены границы её применения. На основе полученной эвристики исследована возможность предсказания решения для случайного набора точек на плоскости.

1. Введение

Задача коммивояжера (TSP) – NP-трудная задача дискретной оптимизации. В этой задаче необходимо найти кратчайший способ обхода всех вершин, причём требуется посещать каждую вершине только один раз. К задаче в общей формулировке можно предъявлять дополнительные требования которые являются частными случаями, каждый из которых имеет свои уникальные вызовы и характеристики.

Задачу коммивояжера можно сформулировать на плоскости. В таком случае она также является NP-трудной задачей, что означает, что она может быть решена точно только с помощью полного перебора. Тем не менее для такой задачи существуют специальные случаи, для которых можно найти оптимальное решение за полиномиальное время.

Для расширения применимости данных алгоритмов и изучения структуры NP-трудных задач в статье [1] предлагается метод попарного сравнения.

В докладе предлагается эвристика для задачи коммивояжера на плоскости, а именно представление набора точек на плоскости в виде вложенных выпуклых оболочек. Их объединение будет путём коммивояжёра. Для такой подхода предлагается функция попарных сравнений. Проведено сравнение полученной эвристики с оптимальным решением и найдены границы допустимого решения. После чего обсуждается возможность применения такой эвристики на основе базы знаний задач коммивояжёра.

2. Постановка задачи

2.1. Формулировка

TSP можно сформулировать как задачу линейного целочисленного программирования. Выделяют обычно две формулировки MTZ и DFJ. Формулировка MTZ выглядит так:

(1) $f(M) = min\{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i, j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\}$,

(2) $x_{ij} \in \{0, 1\}\ i, j = 1, \ldots, n$,

(3) $u_i \in Z\ i = 2, \ldots, n$,

(4) $\sum_{i=1, i \neq j}^{n} x_{ij} = 1\ j = 1, \ldots, n$,

(5) $\sum_{j=1, i \neq j}^{n} x_{ij} = 1\ i = 1, \ldots, n$,

(6) $u_i - u_j + (n-1)_{ij} \leq n - 2\ 2 \leq i \neq j \leq n$,

(7) $1 \leq u_i \leq n - 1\ 2 \leq i \leq n$.

Формула (1) это целевая функция. Равенство (2) показывает, чтобы в каждую вершину прибывали ровно из одной другой вершины, а (3) чтобы из каждой вершины отправлялись ровно в одну другую вершину. (4) и (5) гарантируют, что существует только один тур, охватывающий все вершины, а не два или более разобщенных туров, которые только в совокупности охватывают все вершины.

В данной работе рассматривается задача коммивояжёра на плоскости, поэтому добавляется дополнительное требование к вершинам в виде неравенства треугольника.

2.2. Обзор литературы

Для задачи коммивояжёра есть несколько специальных специальных случаев, для которых существуют полиномиальные алгоритмы [2]. В частности, результат с совпадением пирамидального маршрута с оптимальным, или когда матрица стоимости имеет специальный вид перестановочной матрицы Калмансона.

Для задачи коммивояжёра на плоскости также есть специальные полиномиальные случаи, такие как: все вершины лежат на границе выпуклого многоугольника; часть вершина лежит на границе выпуклого многоугольника, а другая часть на прямой внутри многоугольника; вершины располагаются на нескольких почти параллельных прямых [3].

Если все вершины располагаются на границе выпуклого многоугольника, то тогда оптимальная траектория – обход по границе [3].

В случае задачи коммивояжёра также известно, что оптимальная траектория суть кривая обхода всех вершин без пересечения [4].

Существует способ расширения применения полиномиальных специальных случаев для NP-трудных задач, изначально предложенный для задач теории расписания [1]. Такой подход предлагает сравнивать два примера задачи по некоторому критерию и задавать функцию различия, значение которого равна целевой функции при использовании в качестве решения полиномиального (псевдополиномиального) точного решения задачи. С его помощью можно оценить насколько эвристика, дающая точное решения для подкласса примеров задачи, может быть применима для более широкого класса примеров задачи.

3. Эвристика для задачи коммивояжера на плоскости

3.1. Описание эвристики

За основу взят специальный случай, когда все вершины расположены на евклидовой плоскости и образуют границу выпуклого многоугольника, то есть лежат на выпуклой оболочке множества вершин. В таком случае оптимальный маршрут будет проходить по границе многоугольника и решение можно найти за полиномиальное время $O(n)$, где n – количество заданных вершин.

Для перехода от исходной задачи к специальному случаю был предложен следующий подход: на всём множестве точек на плоскости строится выпуклая оболочка, и такой процесс продолжается для оставшегося множества точек итеративно, покуда точки не исчерпаются.

Полученные выпуклые оболочки соединяются без пересечений по правилу наименьшего расстояния: каждая выпуклая оболочка и вложенная в неё соединяется ребром между ближайшими вершинами.

3.2. Границы применения

Для оценки такой эвристики предложена гипотеза, что погрешность решения зависит от количества вложенных выпуклых оболочек и их расстояний между ними. Гипотезы была проверена с помощью численных экспериментов и аналитически.

В итоге получились два утверждения:

Утверждение 1. $\varDelta_1 < \sum_{i=1}^{k} P_i < P_0(k-1)$, где P_0– периметр внешней оболочки, k – количество выпуклых оболочек в примере.

Утверждение 2. $\frac{P_0}{2(n-1-\pi)} > \varDelta_2$, *где n – число вершин,* P_0– *периметр внешней оболочки.*

3.3. Результаты

Из вышеописанных утверждений следует, что относительная погрешность ошибки линейно растет при росте количества вложенных оболочек. В то же время погрешность убывает при увеличении расстояния между вложенной выпуклой оболочкой и внешней.

При большом количестве близко расположенных вложенных выпуклых оболочек эвристику применять нецелесообразно.

Однако существует порог расстояния между выпуклыми оболочками, с которого допустимо применять метод попарных сравнений.

4. База знаний для задачи коммивояжера на плоскости

Для объединения полиномиальных специальных случаев задачи коммивояжёра и их эвристик, а также удобного внедрения новых предложена база знаний с архитектурой, изображенной на рис. 1.

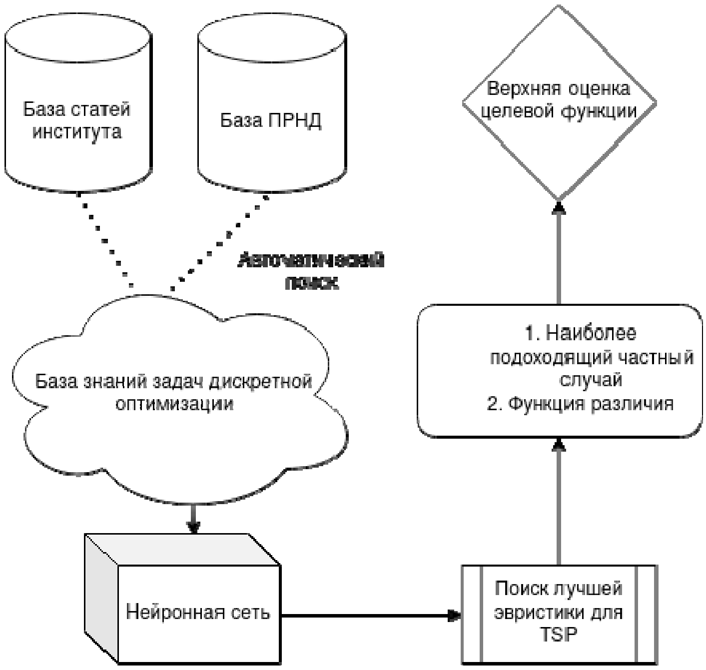

Рис. 1. Архитектура базы знаний.

С помощью автоматического поиска по корпусу статей нужные утверждения попадают в базу знаний. После чего ей можно подавать примеры задачи TSP.

Для выбора нужной эвристики предложена нейронная сеть, решающая задачу регрессии, обученная на основе предпосчитанного набора данных для эталонных примеров задачи коммивояжера.

Обученная нейронная сеть для заданного примера задачи коммивояжёра базе знаний возвращает наиболее подходящий частный случай или эвристику, а также результат функции попарных сравнений, который будет верхней оценкой целевой функции.

5. Заключение

В некоторых случаях метод попарных сравнений вместе с эвристикой дает приемлемый результат, при довольно далеком расстоянии между вложенными выпуклыми оболочками друг от друга.

Планируется поиск точной верхней границы ошибки при увеличении кластеров и от зависимости расстоянии между выпуклыми оболочками и уточнить допустимое решение при использовании метода попарных сравнений.

Дополнительно уточняется архитектура нейронной сети для поиска нужной эвристики и разрабатывается интерфейс базы знаний.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта 22-71-10131.

Список литературы

1. Lemtyuzhnikova D., et al. Pairwise Similarity Estimation for Discrete Optimization Problems // Advances in Systems Science and Applications. 2023. Vol. 23, No. 2. P. 164-177.
2. Gilmore PC, Lawler EL, Shmoys DB. Well solved special cases // Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Shmoys D.B. editors. The traveling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization. New York: Wiley, 1985. P. 87-143.

3. Burkard R.E., et al. Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: a survey // SIAM review. 1998. Vol. 40, No. 3. P. 496-546.
4. Quintas L. V., Supnick F. On some properties of shortest Hamiltonian circuits // The American Mathematical Monthly. 1965. Vol. 72, No. 9. P. 977-980.