УДК 62-50

Частный случай граничного управления процессом колебаний на двух концах

С.А. Олимова
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: olimovasa@gmail.com

С.А. Кочетков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: kos@ipu.ru

А.В. Уткин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: utkin-av@rambler.ru

Ключевые слова: волновое уравнение, граничное управление, колебательный процесс

Аннотация:
Рассматривается управление одномерным волновым уравнением с конечной энергией, которое переводит волну из одного состояние в другое. Один из способов управления - это граничное управление, которое в случае волнового уравнения задается двумя функциями граничных условий, обеспечивающие переход волнового процесса из начального в финальное. Рассматривается программное управление, то есть управление, зависящее от переменной времени. Этот подход с одной стороны обеспечивает относительную легкость нахождения подходящих управлений, с другой стороны, получаемые значения восприимчивы к малейшим возмущениям, то есть при изменении правой части или компонент левой части волнового уравнения, граничные условия необходимо будет подбирать снова, уже с учетом изменившихся данных.

1. Введение

Управление волновым процессом применяется во многих областях науки: электродинамике, механике сплошной среды, акустите и т.д. Однако исследований в области управлением волновым процессом не так много, а имеющиеся результаты не до конца понятны в практическом применении. Именно поэтому в данной статье исследуется частный случай граничной задачи.

Современное состояние данной области следующее. В.А. Ильин в [1] описывал условия существования и единственности (если управление единственно) решения задачи граничного управления, где разбивал искомую задачу граничного управления на несколько:

- рассматривает промежуток времени $T < l$, где l – длина струны, и накладывает дополнительные условия на начальные и граничные условия для существования решения;

- момент времени $T = l$, которое называет критической точкой, где не требуются дополнительные условия на начальные условия и граничные управления;

- момент времени $l < T < 2l$, где решение не единственно.

Все последующие статьи так или иначе опираются на работы Ильина. Например, Абдукаримов М.Ф. в работе [2] исследовал случай перехода из нулевого момента времени в момент времени $T = 2l$, где l – длина струны и получил аналитические формулы для решения и граничного управления. В статье [3] приведен явный аналитический вид граничных управлений и решения для случая $l < T < 2l$.

В статье [4] А.А. Андреев получил необходимые условия на функции, определяющие начальные и финальные условия, при которых удается решить задачу управления для объектов, процесс колебания которых описывается системой волновых уравнений с граничными условиями первого рода.

В данной статье рассмотрен частный случай получения решения волнового уравнения с заданными начальными и финальными состояниями.

2. Постановка задачи

Пусть дано одномерное уравнение вынужденных колебаний струны с конечной энергией на отрезке $[0, l]$

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t).$$

Необходимо найти такие граничные програмные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, переводящие процесс из начального состояния $u(x,0) = \varphi_1(x), u_t(x,0) = \psi_1(x)$ в конечное состояние $u(x,T) = \varphi_2(x), u_t(x,T) = \psi_2(x)$, где $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in W^{(1)}[0,l]$, $\psi_1(x), \psi_2(x) \in L_{(2)}[0,l]$, $f(x,t) \in L_{(2)}[0,l] \times L_{(2)}[0,T]$.

Основные допущения.

1. Рассматривается однородное волновое уравнение.

2. Решение ищется для частного случая, когда $u(x,0) = \varphi_1(x) = \sin x, \quad u_t(x,0) = \psi_1(x) = 0, u(x,T) = \varphi_2(x) = 0, \quad u_t(x,T) = \psi_2(x) = -\cos x$.

3. Для конечного момента времени справедливо равенство $T = l$.

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть $T = l$. Тогда необходимым и достаточным условием существования единственного решения задачи граничного управления является* *следующее требование*

$$\varphi_1(0)+\varphi_1(l)+\int_0^l \psi_1(x)dx+\int_0^l \psi_2(x)dx-\varphi_2(0)-\varphi_2(l)=0.$$

Критерий единственности существования задачи граничного управления для вышеуказанных начальных условий выполняется.

При выполнении теоремы решение указанной задачи дается выражениями

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t)+\varphi_1(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi_1(\sigma)d\sigma\right] & \text{в } \triangle_1, \\ \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+t)+\int\limits_0^{x+t}\psi_1(\sigma)d\sigma+\varphi_2(x-t+l)-\int\limits_l^{x-t+l}\psi_2(\sigma)d\sigma\right] & \text{в } \triangle_2, \\ \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x-t)+\int\limits_{x-t}^{l}\psi_1(\sigma)d\sigma+\varphi_2(x+t-l)-\int\limits_0^{x+t-l}\psi_2(\sigma)d\sigma\right] & \text{в } \triangle_3, \\ \frac{1}{2}\left[\varphi_2(x+t-l)+\varphi_2(x-t+l)+\int\limits_{x-t+l}^{x+t-l}\psi_2(\sigma)d\sigma\right] & \text{в } \triangle_4, \end{cases}$$

где $\triangle_1$ – треугольник с линиями $x-t=0, x+t-l=0, t=0$, $\triangle_2$ – треугольник с линиями $x-t=0, x+t-l=0, x=0$, $\triangle_3$ – треугольник с линиями $x-t=0, x+t-l=0, x=l$, $\triangle_4$ – треугольник с линиями $x-t=0, x+t-l=0, t=l$.

Искомые граничные управления вычисляются с помощью следующих формул

$$\mu(t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(t)+\int_0^t \psi_1(t)+\varphi_2(l-t)+\int_{l-t}^{l}\psi_2(t)+\int_0^l f(\tau-t,\tau)d\tau\right], \tag{1}$$

$$\nu(t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(l-t)+\int_0^{l-t}\psi_1(t)+\varphi_2(t)+\int_0^t \psi_2(t)-\int_0^l f(l+t-\tau,\tau)d\tau\right]. \tag{2}$$

Следовательно, из формул (1)–(2) граничные условия будут следующими

$$u(0,t)=\mu(t)=\frac{1}{2}\left[\sin t-\sin l+\sin(l-t)\right],$$
$$u(l,t)=\nu(t)=\frac{1}{2}\left[\sin(l-t)-\sin t\right].$$

Искомое решение запишется в виде

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[\sin(x+t)+\sin(x-t)\right], & \text{в } \triangle_1, \\ \frac{1}{2}\left[\sin(x+t)-\sin(x-t+l)+\sin l\right], & \text{в } \triangle_2, \\ \frac{1}{2}\left[\sin(x+t)-\sin(x-t+l)\right], & \text{в } \triangle_3, \\ \frac{1}{2}\left[\sin(x+t-l)-\sin(x-t+l)\right], & \text{в } \triangle_4, \end{cases}$$

4. Результаты моделирования

Промоделируем решение численным методом, чтобы проверить правильность управления. Для этого воспользуемся разностной схемой крест с числом Куранта $\gamma=1$:

$$(3)\qquad \frac{1}{\tau^2}(y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}) = \frac{a^2}{h^2}(y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j)$$

Так как число Куранта равно единице, то условие устойчивости выполняется, если $\frac{\tau}{h} \leqslant 1$, в разностной схеме взяты равные шаги по времени и по пространству $h = \tau = 0.005$.

Численное решение на отрезке $[0, 1]$ следуюшее при фиксированном нулевом времени:

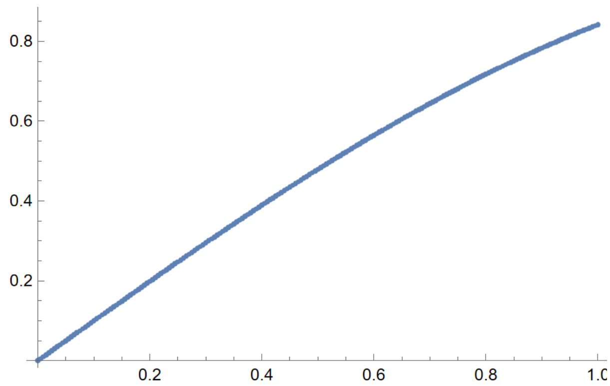

Рис. 1. Струна в начальный момент времени

5. Заключение

В данной работе приведено частное решение волнового уравнения с заранее заданными начально-краевыми условиями и получены аналитические формулы граничных управлений. Направлением дальнейших исследований является получение приближенных решений на основе перехода от уравнений в частных производных к конечномерным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Использование данного подхода позволит синтезировать граничное управление на основе использования обратных связей.

Список литературы

1. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000, Т. 36, № 11. С. 1513–1528.
2. Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении упругой силой на одном конце при закрепленном втором процесса вынужденных колебаний струны // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58, № 10.
3. Абдукаримов М.Ф. Об успокоение и возбуждение колебательного процесса, описываемого неоднородным волновым уравнением, за большие промежутки времени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54, № 8.
4. Андреев А.А., Лексина С.В. Задача граничного управления для систем волновых уравнений.