УДК 917.977.58

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВОРОНКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИНАМИКОЙ

В.Н. Ушаков
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
E-mail: ushak@imm.uran.ru

А.А. Ершов
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
E-mail: ale10919@yandex.ru

А.В. Ушаков
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ключевые слова: интегральная воронка, управляемая система, целевое множество, фазовое ограничение, дифференциальное включение, переменная динамика.

Аннотация: Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, динамика которой изменяется на нескольких малых промежутках времени. Изучается зависимость множеств достижимости и интегральных воронок от длительности и расположения участков изменения динамики. Оценивается степень влияния изменения динамики на интегральные воронки. Сформулированы задачи управления интегральными воронками с помощью выбора участка, на которых динамика системы изменяется по заданному правилу.

1. Введение

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, динамика которой изменяется на нескольких малых участках времени по заданному правилу. Изучаются множества достижимости и интегральные воронки дифференциального включения, соответствующего системе. Проблематика, связанная с изучением множеств достижимости и интегральных воронок динамических систем, тесно переплетена с многочисленными задачами теории динамических систем и, в том числе, с теми, которые возникают в теории управления и теории дифференциальных игр. В настоящей работе изучается зависимость множеств достижимости и интегральных воронок от изменения динамики, ограниченной по величине и времени. Для оценки этой зависимости вводятся системы множеств в фазовом пространстве, аппроксимирующие множества достижимости и интегральные воронки на заданном промежутке времени, отвечающие конечному разбиению этого промежутка. При этом сначала оценивается степень зависимости аппроксимирующей системы множеств от параметра и затем эта оценка используется при оценке зависимости от параметра множеств достижимости и интегральных воронок дифференциального включения. Такой подход естественен и особенно полезен при изучении конкретных прикладных задач управления, при решении которых в конечном итоге приходится иметь дело не с идеальными множествами достижимости и интегральными воронками, а с их аппроксимациями, отвечающими дискретному представлению временного промежутка. Кроме того, рассмотрены задачи наведения интегральных воронок на целевое множество и уклонения от него.

2. Оценка влияния изменения динамики на множества достижимости и интегральные воронки

Пусть на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ заданы управляемые системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad u \in P_f, \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x, u), \quad u \in P_g, \tag{2}$$

где $t \in [t_0, \vartheta]$ – время, $x(t) \in \mathbb{R}^m$ – фазовый вектор системы, $P_f \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^r)$ и $P_g \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^r)$ – ограничения на управляления u.

Предполагается, что системы (1) и (2) удовлетворяют следующим условиям.

A. Вектор-функции $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ определены и непрерывны на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P_f$ и $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P_g$ соответственно и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдутся числа $L_f \geqslant 0$ и $L_g \geqslant 0$, функции $\omega_f(\delta) \downarrow 0$ и $\omega_g(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|f(t, x_*, u) - f(t, x^*, u)\| \leqslant L_f \|x_* - x^*\|,$$
$$\|g(t, x_*, u) - g(t, x^*, u)\| \leqslant L_g \|x_* - x^*\|,$$

$$\|f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)\| \leqslant \omega_f(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|),$$
$$\|g(t_*, x_*, u) - g(t^*, x^*, u)\| \leqslant \omega_g(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|),$$

где $(t_*, x_*) \in D$, $(t^*, x^*) \in D$, $u \in P_f$ или $u \in P_g$ соответственно.

B. Найдутся такие $\gamma_f \geqslant 0$ и $\gamma_g \geqslant 0$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \gamma_f (1 + \|x\|), \quad \|g(t, x, u)\| \leqslant \gamma_g (1 + \|x\|)$$

при $(t,x) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}$, $u \in P_f$ или $u \in P_g$ соответственно.

Принимая во внимание условие **B**, мы можем указать ограниченную и замкнутую область $D \subset [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^m$, содержащую всевозможные движения систем (1) и (2), а также все возникающие в ходе дальнейших рассуждений множества из $[t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Обозначим символом $\Sigma^{(f)}$ управляемую систему (1) на промежутке $[t_0,\vartheta]$, обладающую (условно) неизменной динамикой.

Обозначим символом $\Sigma^{(\alpha)}$, где $\alpha = [t_*,t^*] \subset [t_0,\vartheta]$, управляемую систему с переменной динамикой, возникшую на базе системы $\Sigma^{(f)}$, которую определяем следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t,x,u), \quad t \in [t_0,\vartheta],$$

где

$$\varphi(t,x,u) = \begin{cases} f(t,x,u), & u \in P_f \text{ при } t \in [t_0,t_*), \\ g(t,x,u), & u \in P_g \text{ при } t \in [t_*,t^*), \\ f(t,x,u), & u \in P_f \text{ при } t \in [t_*,\vartheta]. \end{cases}$$

Управляемую систему $\Sigma^{(\alpha)}$ будем называть *вариацией* системы $\Sigma^{(f)}$. Различие между множествами достижимости систем $\Sigma^{(\alpha)}$ и $\Sigma^{(f)}$ в хаусдорфовой метрике было оценено в [1].

Наряду с системой $\Sigma^{(\alpha)}$ рассмотрим систему $\Sigma^{(\beta)}$, проварьированную на промежутке $\beta = [\tau_*,\tau^*] \subset [t_0,\vartheta]$ и определенную следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = h(t,x,u), \quad t \in [t_0,\vartheta],$$

где

$$h(t,x,u) = \begin{cases} f(t,x,u), & u \in P_f \text{ при } t \in [t_0,\tau_*), \\ g(t,x,u), & u \in P_g \text{ при } t \in [\tau_*,\tau^*), \\ f(t,x,u), & u \in P_f \text{ при } t \in [\tau_*,\vartheta]. \end{cases}$$

Возможны следующие варианты расположения промежутков $\alpha = [t_*,t^*]$ и $\beta = [\tau_*,\tau^*]$ в $[t_0,\vartheta]$:
1) $t_0 \leqslant \tau_* \leqslant t_* \leqslant \tau^* \leqslant t^* \leqslant \vartheta$;
2) $t_0 \leqslant t_* \leqslant \tau_* \leqslant \tau^* \leqslant t^* \leqslant \vartheta$;
3) $t_0 \leqslant t_* \leqslant \tau_* \leqslant t^* \leqslant \tau^* \leqslant \vartheta$;
4) $t_0 \leqslant t_* \leqslant t^* \leqslant \tau_* \leqslant \tau^* \leqslant \vartheta$.

Этими вариантами исчерпываются фактически другие варианты взаимного расположения α и β в $[t_0,\vartheta]$, так как они получаются из указанных четырех с помощью замен $t_* \leftrightarrow \tau_*$, $t^* \leftrightarrow \tau^*$.

Пусть $X^{(0)} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ – начальное множество, $(t_0,X^{(0)}) \in D$. Обозначим через $X^{(\alpha)}(t_0,X^{(0)})$ – интегральную воронку системы $\Sigma^{(\alpha)}$, а через $X^{(\beta)}(t_0,X^{(0)})$ – интегральную воронку системы $\Sigma^{(\beta)}$.

Введем обозначение: $\rho(\alpha,\beta)$ – хаусдорфово расстояние между отрезками α и β на прямой $\mathbb{R}^1$. Обозначим через $L = \max\{L_f,L_g\}$, $\gamma(t) = \max\{\gamma_f(t),\gamma_g(t)\}$. Введем также параметр $\rho \in [0,\vartheta - t_0]$, множество $T_\rho = \{[t_1,t_2] \subset [t_0,\vartheta] : t_2 - t_1 \leqslant \rho\}$, функцию

$$\varkappa(\rho) = \max_{[t_1,t_2] \in T_\rho} \int\limits_{t_1}^{t_2} \gamma(t)dt, \quad \rho \in [0,\vartheta - t_0],$$

и функцию

$$\varkappa^*(\rho) = 2e^{L(\vartheta - t_0)}\varkappa(\rho), \quad \rho \in [0, \vartheta - t_0].$$

В работе [2] доказана следующая оценка устойчивости интегральной воронки к изменению динамики на двух малых промежутках времени.

Теорема 1. *При любом взаимном расположении отрезков α и β в $[t_0, \vartheta]$ хаусдорфово расстояние между интегральными воронками управляемых систем $\Sigma^{(\alpha)}$ и $\Sigma^{(\beta)}$ удовлетворяет неравенству*

$$d\big(X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)}), X^{(\beta)}(t_0, X^{(0)})\big) \leqslant \varkappa^*(\rho(\alpha, \beta)).$$

3. Задачи управления интегральными воронками

В этом разделе будет рассмотрена управляемая система $\Sigma^{(f)}$ на $[t_0, \vartheta]$, а также управляемая система $\Sigma^{(\alpha)}$, $\alpha = [t_*, t^*]$ на $[t_0, \vartheta]$. Наряду с ними рассматриваются начальное множество $X^{(0)}$, $(t_0, X^{(0)}) \subset D$, и целевое множество $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, отвечающее моменту ϑ.

Сформулируем задачи сближения и уклонения интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, соответствующей системе $\Sigma^{(\alpha)}$, с M в момент ϑ. При этом интегральная воронка $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$ трактуется как вариация интегральной воронки $X(t_0, X^{(0)})$, возникшая в результате варьирования системы $\Sigma^{(f)}$ на промежутке $\alpha = [t_*, t^*]$ на $[t_0, \vartheta]$. Это варьирование рассматривается как своеобразное управление системой $\Sigma^{(f)}$ и соответствующей ей воронкой $X(t_0, X^{(0)})$ путем выбора управляющего параметра $\alpha = [t_*, t^*]$.

Обозначим через $X^{(\alpha)}(\vartheta)$ временно́е сечение интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, иными словами, множество достижимости системы $\Sigma^{(\alpha)}$ в момент времени $t = \vartheta$.

Задача 1 (о сближении). Заданы компакты $X^{(0)}$ и M в $\mathbb{R}^m$ и число $0 < \lambda < \vartheta - t_0$. Требуется определить промежуток $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющий

$$\rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) = \min\{\rho(X^{(\beta)}, M) : \beta = [\eta_*, \eta^*] \subset [t_0, \vartheta], \eta^* - \eta_* = \lambda\}.$$

Представляет интерес и дуальная к задаче 1 задача об оптимальном уклонении интегральной воронки $X^{(\alpha)}(t_0, X^{(0)})$, $\alpha = [t_*, t^*]$ от M.

Задача 2 (об уклонении). Заданы компакты $X^{(0)}$ и M в $\mathbb{R}^m$ и число $0 < \lambda < \vartheta - t_0$. Требуется определить такой промежуток $\alpha = [t_*, t^*] \subset [t_0, \vartheta]$, что

$$\rho(X^{(\alpha)}(\vartheta), M) = \max\{\rho(X^{(\beta)}(\vartheta), M) : \beta = [\eta_*, \eta^*] \subset [t_0, \vartheta], \eta^* - \eta_* = \lambda\}.$$

4. Заключение

Рассмотрена нелинейная управляемая система на конечном промежутке времени в конечномерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Изучена устойчивость ее интегральной воронки (последнего временно́го сечения интегральной воронки) в зависимости от скачкообразного изменения динамики системы на нескольких малых промежутках времени. Степень возмущения интегральной воронки (ее последних временны́х сечений) оценивается в хаусдорфовой метрике: получены экспоненциальные оценки степени возмущения. Кроме задач, связанных с получением упомянутых выше оценок, рассмотрены задачи о наведении интегральной воронки на целевое множество, либо, наоборот уклонении от него с помощью оптимального выбора одного временно́го промежутка с измененной по заранее известному закону динамикой систем.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377)

Список литературы

1. Ushakov V.N. Control systems of variable structure. Attainability sets and integral funnels // J. Math. Sci. 2022. Vol. 260. P. 820–832.
2. Ушаков В.Н., Ершов А.А., Ушаков А.В. Об интегральных воронках управляемых систем, изменяемых на нескольких малых промежутках времени // Прикл. матем. и мех. 2023. Т. 87, № 5. С. 829–861.