УДК 533.911.5

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

И.А. Финогенко
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: fin@icc.ru

Ключевые слова: Функционально-дифференциальное включение, запаздывание, скользящий режим, инвариантно-дифференцируемый функционал.

Аннотация: Исследуются функционально-дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Основное внимание уделяется проблемам, обусловленным функциональными характеристиками объекта исследований и запаздыванию. Предполагается, что в общем случае множества точек разрыва правых частей обладают свойством граничности. Предлагается способ описания этих множеств для кусочно непрерывных правых частей с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов. Решения исследуемых уравнений определяются, как решения в смысле А.Ф. Филиппова с использованием функционально-дифференциальных включений. На конкретном примере обсуждается обусловленные запаздываем особенности аналогов скользящих режимов.

1. Введение

Объектом исследования является функционально-дифференциальное уравнение

(1) $$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)),\ x_{t_0}(\cdot) = \phi_0(\cdot)$$

где $f : R^1 \times C_\tau \to R^n$ – разрывная функция, R^n – n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, C_τ – пространство всех непрерывных функций $\phi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau, 0]$ со значениями в R^n с обычной sup-нормой $\|\phi(\cdot)\|_C = \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|\phi(\theta)\|$, $\tau \geqslant 0$ – произвольное вещественное число.

Для систем без запаздывания множество точек $M \subset R^{1+n}$ разрыва правой части уравнения представляет собой множество нулевой меры Лебега [1], в частности, оно может состоять из конечного числа гиперповерхностей. В наших исследованиях функция f разрывна на множестве точек $M \subset R^1 \times C_\tau$.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью движение по гиперповерхности точек разрыва правой части называется скользящим режимом. В этом случае вектор производной решения необходимо принадлежит касательной гиперплоскости в каждой точке гиперповерхности. Движения системы

(1) по множеству M по аналогии с разрывными системами без запаздывания также будем называть скользящими режимами. Но заметим, что для множеств M в функциональном пространстве этот термин, возможно, будет не всегда оправданным. Например, движение по множеству функций $M = \{\phi(\cdot) : \phi(-\tau) = 0\}$ полностью определяется начальной функцией и не зависит от правой части уравнения (1).

Для разрывных систем с запаздыванием структура множества точек разрыва правых частей уравнений может оказаться гораздо более сложной Возникают вопросы: какими свойствами должно обладать множество M точек разрыва правой правой части функционально-дифференциальных уравнений (1)? Как его описывать так, чтобы можно было получать при этом уравнения скользящих режимов?

2. Определение и существование решений

Мы полагаем, что общим свойством, которым должно обладать множество M точек разрыва правой части уравнения (1), является граничность, т.е. дополнение к M должно быть всюду плотным или, эквивалентно, иметь пустую внутренность. В частности, множества нулевой меры Лебега этим свойством обладают. При таком подходе для каждой точки $(t, \phi(\cdot)) \in M$ граничного множества M будет корректно определено множество предельных значений функции $f(t', \phi'(\cdot))$ при условии, что $(t', \phi'(\cdot)) \to (t, \phi(\cdot))$, $(t', \phi'(\cdot)) \notin M$. Выпуклую, замкнутую оболочку всех предельных значений функции f в точке $(t, \phi(\cdot))$ обозначим через $F(t, \phi(\cdot))$.

Определение 1. *Решением уравнения (1) с начальной функцией $x_{t_0}(\cdot) = \phi_0(\cdot)$ называется непрерывная функция $x(t)$, определенная на некотором отрезке $[t_0 - \ \tau, t_1]$, $t_1 > t_0$, абсолютно непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$ и для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ удовлетворяющая дифференциальному включению*

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t(\,\cdot\,)). \tag{2}$$

Определение решения уравнения (1) соответствует определению решения уравнения в смысле А.Ф. Филиппова для разрывных уравнений без запаздывания [1]. Отметим, что многозначное отображение $F(t, \phi(\cdot))$ имеет замкнутый график и является локально ограниченным. Поэтому оно полунепрерывно сверху (см. [2]) и справедлива следующая

Теорема 1. *Для любой начальной функции $\phi_0(\cdot)$ уравнение (1) имеет локальное решение, которое может быть продолжено на максимальный (конечный или бесконечный) промежуток существования решения $[t_0 - \tau, \omega)$.*

3. Функционально-дифференциальные уравнения с кусочно непрерывной правой частью

По аналогии с [1, стр. 39] введем следующие определения.

Определение 2. *Функцию $f(t, \phi(\cdot))$ будем называть кусочно-непрерывной в пространстве $D = R^1 \times C_\tau$, если его можно представить в виде объединения конечного числа областей D_j, $j = 1, \ldots, m$, в каждой из которых функция f непрерывна вплоть до границы, и множества M, состоящего из точек границ* *этих областей. Функция $f(t,\phi(\cdot))$ называется непрерывной вплоть до границы, если в каждой точке $(t,\phi(\cdot)) \in M$ она имеет конечные пределы по каждому из множеств D_j, для которых точка $(t,\phi(\cdot))$ является граничной. Величина $\tilde{f}_j$ называется пределом функции $f(t',\psi'(\cdot))$ в точке $(t,\psi(\cdot)) \in M$ по множеству D_j, если для любой последовательности $(t_k,\psi_k(\cdot)) \to (t,\psi(\cdot))$ такой, что $(t_k,\psi_k(\cdot)) \in D_j$ для всех $k = 1,2,\ldots$ выполняется $\lim_{k\to\infty} f(t_k,\psi_k(\cdot)) = \tilde{f}_j$.*

Заметим, что области D_j – открытые связные множества, в каждой из которых функция f непрерывна.

Для произвольной функции $\phi(\cdot) \in C_\tau$ и произвольного числа $\Delta > 0$ через $E_\Delta(\phi(\cdot))$ обозначим множество всех непрерывных продолжений $\Phi(\cdot)$ функции $\phi(\cdot)$ на отрезок $[-\tau,\Delta]$. Для каждой функции $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ и числа $\xi \in [0,\Delta)$ через $\Phi_\xi(\theta)$ обозначим $\Phi_\xi(\theta) = \Phi(\xi+\theta)$, где $-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$.

Приведем следующие определения из [3].

Определение 3. *Функционал $W : C_\tau \to R^1$ имеет инвариантную производную $\partial_\phi W$ в точке $\phi(\cdot) \in C_\tau$, если для любой $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\phi(\cdot))$ функция $Y_\Phi(\xi) = W(\Phi_\xi(\cdot))$ имеет в нуле конечную правую производную $\partial Y_\Phi/\partial\xi\Big|_{\xi=+0}$, инвариантную относительно функций $\Phi(\cdot)$. Последнее означает, что значение правой производной в нуле одно для всех $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\phi(\cdot))$.*

Определение 4. *Функционал $W : R^1 \times R^n \times C_\tau \to R$ инвариантно дифференцируем в точке $p = (t,x,\phi(\cdot)) \in R^1 \times R^n \times C_\tau$, если в этой точке существуют конечные $\partial W/\partial t, \nabla_x W, \partial_\phi W$ и для любой $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\phi(\cdot))$ выполняется равенство*

$$W(t+\zeta,x+z,\Phi_\xi(\cdot)) - W(t,x,\phi(\cdot)) =$$
$$= \frac{\partial W[p]}{\partial t}\cdot\zeta + \langle\nabla_x W[p],z\rangle + \partial_\phi W[p]\cdot\xi + o\left(\sqrt{\|z\|^2+\zeta^2+\xi^2}\right)$$

при каждых $z \in R^n$, $\xi \in [0,\Delta]$, $\zeta \geqslant 0$, причем $o(\cdot)$ зависит от выбора $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\phi(\cdot))$. (Здесь $\nabla_x W$ – градиент функционала W по переменной x, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – знак скалярного произведения).

Свойства и многочисленные примеры инвариантно дифференцируемых функционалов имеются в [3] и связаны, в основном, с вопросами прямого метода Ляпунова в теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений. Здесь мы применяем инвариантно-дифференцируемые функционалы для описания множества точек разрыва функции $f(t,\phi(\cdot))$ в виде объединения $M = \cup_i^k M_i$ конечного числа многообразий вида

$$M_i = \{(t,\phi(\cdot)) : W_i(t,\phi(0),\phi(\cdot)) = 0\}, i = 1,\ldots,k, \tag{3}$$

где W_i – непрерывные, инвариантно дифференцируемые функционалы.

Обозначим через $F_0(t,\phi(\cdot))$ выпуклую оболочку всех пределов кусочно непрерывной функции $f(t,\phi'(\cdot))$ по областям D_j при $\phi'(\cdot) \to \phi(\cdot)$ при фиксированном t, и через $F(t,\phi(\cdot))$ – выпуклую оболочку всех пределов функции $f(t',\phi'(\cdot))$ по этим же областям D_j при $(t',\phi'(\cdot)) \to (t,\phi(\cdot))$.

Утверждение 1. *Пусть множество M точек разрыва кусочно непрерывной функции $f(t,\phi(\cdot))$ определяется конечным набором многообразий M_i вида (3) и предположим, что для каждого $i \in I(t,x,\phi(\cdot)) \overset{\Delta}{=} \{i \in (1,\ldots,k) : W_i(t,x,\phi(\cdot)) = 0\}$ выполняется $\nabla W_i(t,x,\phi(\cdot)) \neq 0$. Тогда множество M обладает свойством* *граничности и* $F_0(t, \phi(\cdot)) = F(t, \phi(\cdot))$ *во всех точках рассматриваемой области переменных* $(t, \phi(\cdot))$.

Замечание 1. *Изучение вопросов существования и общих свойств решений проще для включения (2). Но для исследования качественных свойств решений и некоторых других вопросов, для которых структура правой части включения (2) имеет значение, может использоваться включение* $\dot{x} \in F_0(t, \phi(\cdot))$.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, \phi(\cdot), u_1, \ldots, u_k) \tag{4}$$

в предположении, что функция f непрерывна, каждое управление $u_i = u_i(t, \phi(\cdot))$ (скалярная функция) разрывно на своем многообразии $M_i = \{(\phi(\cdot)) : W_i(t, \phi(0), \phi(\cdot)) = 0\}$ и u_i^-, u_i^+ – предельные значения функции u_i с обеих сторон многообразия M_i, $i = 1, \ldots, k$. *Эквивалентные управления* $u_i^{eq} = u_i^{eq}(t, \phi(\cdot))$ определяются из уравнений

$$\langle \nabla_x W_i[p], f(t, \phi(\cdot), u_1^{eq}, \ldots, u_k^{eq}) \rangle + \partial_\phi W_i[p] + \partial_t W_i[p] \Big|_{p=(t,\phi(0),\phi(\cdot))} = 0, i = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Если каждое значение u_i^{eq} содержится в отрезке с концами u_i^-, u_i^+, то уравнением скользящего режима будет

$$\dot{x} = f(t, \phi(\cdot), u_1^{eq}, \ldots, u_k^{eq}). \tag{6}$$

В форме уравнения (6) с использованием формулы (5) известной для систем без запаздывания метод эквивалентного управления (см. [1, стр. 44]) реализуется для уравнения (4) с последействием.

4. Двухпозиционный авторулевой с запаздыванием

Уравнение движения судна вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс записывается в виде [5, стр. 104-109]

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} + h \frac{d\phi}{dt} = M,$$

где ϕ – угол между продольной осью судна и заданным курсом, I – главный центральный момент инерции, h – коэффициент вязкого трения , M – момент внешних сил. Создание устойчивого состояния равновесия, соответствующего курсу $\phi = 0$, возможно лишь перемещением руля. Одной из систем автоматической стабилизации курса является двухпозиционный авторулевой, при котором руль может находиться лишь в двух положениях: $\psi = \pm\psi_0$, создавая моменты сил $M = \pm M_0$. Положение руля зависит от угла ϕ и скорости его изменения $d\phi/dt$. Перекладка руля осуществляется в момент прохождения нулевого значения величиной ξ, с которой момент сил связан формулами:

$$\xi = \phi + b\frac{d\phi}{dt},\ M(\xi) = M_0\, sgn\, \xi,$$

где b – постоянный параметр, упреждающий перекладку руля ввиду инерциального вращения судна. Переходя к безразмерным координатам, запишем следующее дифференциальное уравнение движения судна

(7) $$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -y - \ sgn\,(x + \beta y),$$

где $x = h^2\phi/M_0 I$, $\beta = bh/I$ и новая независимая переменная (время) имеет вид $t' = ht/I$.

Уравнения (7) детально изучены в [5] методом точечных отображений, где показано, что траектории системы попадают на отрезок $|y| \leqslant \beta/(1-\beta)$ прямой $x+\beta y = 0$ не более, чем через два переключения. Движение по этой прямой является скользящим режимом системы (7).

Предположим, что в уравнении прямой переключения имеется запаздывание по переменной x. Сохраняя для t' прежнее обозначение t, запишем уравнение вращательного движения судна в виде

(8) $$\dot{x}(t) = y(t),\ \dot{y}(t) = -y(t) - M\,sgn\,(x(t-\tau) + \beta y(t)).$$

Многообразием D точек разрыва для уравнения (8) в пространстве C_τ является множество двумерных функций $(x(\cdot), y(\cdot))$, удовлетворяющих условию $\beta y(0) + x(-\tau) = 0$. Скользящий режим осуществляется по действием эквивалентного управления
$$u^{eq} = (y(t-\tau) + x(t-\tau))/\beta,$$
который должен удовлетворять ограничению $|u^{eq}| \leqslant \beta M_0$ хотя бы на одном отрезке времени длины τ, после чего он уже не прекращается. Таким образом, условие существования скользящего режима для уравнений с запаздыванием (2) имеет вид неравенства
$$|y(-\tau) + x(-\tau)| \leqslant \beta M_0.$$

За уравнение скользящего режима можно принять $\beta\dot{x}(t) + x(t-\tau) = 0$ и при условии $\tau < \beta$ [4, стр. 161] решение этого уравнения асимптотически стремится к нулевой функции $(0,0)$.

В заключение отметим, что некоторые вопросы асимптотического поведения функционально-дифференциальных уравнения с разрывной правой частью исследовались в [6].

Исследование выполнено в рамках госзадания Минобрнауки России (проект № 1210401300060-4).

Список литературы

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 215 с.
3. Kim A.V. i-Smooth Analysis. Chichester-New York-Brisban: Wiley. 2014. 279 p.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
5. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
6. Finogenko I.A. Method of Limiting Differential Inclusions for Nonautonomous Discontinuous Systems with Delay // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2019. Vol. 305, No. 1. P. S65–S74.