$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -y - \ sgn\,(x + \beta y), \tag{7}$$

где $x = h^2\phi/M_0 I$, $\beta = bh/I$ и новая независимая переменная (время) имеет вид $t' = ht/I$.

Уравнения (7) детально изучены в [5] методом точечных отображений, где показано, что траектории системы попадают на отрезок $|y| \leqslant \beta/(1-\beta)$ прямой $x + \beta y = 0$ не более, чем через два переключения. Движение по этой прямой является скользящим режимом системы (7).

Предположим, что в уравнении прямой переключения имеется запаздывание по переменной x. Сохраняя для t' прежнее обозначение t, запишем уравнение вращательного движения судна в виде

$$\dot{x}(t) = y(t),\ \dot{y}(t) = -y(t) - M\,sgn\,(x(t-\tau) + \beta y(t)). \tag{8}$$

Многообразием D точек разрыва для уравнения (8) в пространстве C_τ является множество двумерных функций $(x(\cdot), y(\cdot))$, удовлетворяющих условию $\beta y(0) + x(-\tau) = 0$. Скользящий режим осуществляется по действием эквивалентного управления

$$u^{eq} = (y(t-\tau) + x(t-\tau))/\beta,$$

который должен удовлетворять ограничению $|u^{eq}| \leqslant \beta M_0$ хотя бы на одном отрезке времени длины τ, после чего он уже не прекращается. Таким образом, условие существования скользящего режима для уравнений с запаздыванием (2) имеет вид неравенства

$$|y(-\tau) + x(-\tau)| \leqslant \beta M_0.$$

За уравнение скользящего режима можно принять $\beta\dot{x}(t) + x(t-\tau) = 0$ и при условии $\tau < \beta$ [4, стр. 161] решение этого уравнения асимптотически стремится к нулевой функции $(0,0)$.

В заключение отметим, что некоторые вопросы асимптотического поведения функционально-дифференциальных уравнения с разрывной правой частью исследовались в [6].

Исследование выполнено в рамках госзадания Минобрнауки России (проект № 1210401300060-4).

Список литературы

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 215 с.
3. Kim A.V. i-Smooth Analysis. Chichester-New York-Brisban: Wiley. 2014. 279 p.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
5. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
6. Finogenko I.A. Method of Limiting Differential Inclusions for Nonautonomous Discontinuous Systems with Delay // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2019. Vol. 305, No. 1. P. S65–S74.