

УДК 517.9

ИНВАРИАНТНАЯ ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ ПРИ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

В.М. Четвериков

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», МИЭМ
Россия, 123458, Москва, ул. Таллинская, 34
E-mail: vchetverikov@hse.ru

Ключевые слова: задача стабилизации, глобальная устойчивость, инвариантная область притяжения.

Аннотация: Рассмотрена задача стабилизации при управлении через обратную связь для системы двух нелинейных ДУ. Показано, что в зависимости от выбора управления достигаются различные инвариантные области притяжения начала координат.

1. Введение

Возможность решения задачи стабилизации для автономной системы линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) с помощью стационарной обратной связи определяется выполнением критерия управляемости Калмана. Это означает, что если СЛДУ содержит n уравнений, то обратной связью должно быть охвачено достаточное число уравнений, но далеко не всегда их число должно быть равно n .

Принципиально иная ситуация возникает для автономной системы нелинейных дифференциальных уравнений (СНДУ). Как будет показано на одном простом примере из книги [1], наличие нелинейных слагаемых, не охваченных обратной связью, приводит, в общем случае, к необходимости определения гарантированной области начальных условий для стабилизации, которая лишь в редких случаях может быть глобальной. Подобные вопросы с позиции построения приближенной функции Ляпунова рассматривались ранее в работе [2].

2. Пример двумерной СНДУ с параметром при нелинейности

Рассмотрим задачу стабилизации для вектора $z(t)$ в двумерном фазовом пространстве

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}z &= A \cdot z + B \cdot v + F(z), z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \\ F(z) &= \eta \begin{pmatrix} x^2 \cdot y \\ -x^3 \end{pmatrix}, z(0) = z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где b_1, b_2, η – числовые параметры, а вектор-функция v – искомое управление через обратную связь. Эта задача рассматривалась в параграфе 4.7 книги [1] только для параметров $b_1 = b_2 = \eta = 1$ как пример алгоритмического конструирования регулятора для нелинейной системы. В данной работе нас будут интересовать лишь такие решения, которые удовлетворяют условию стабилизации

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

В качестве функционала качества управления выберем функционал

$$(3) \quad J[z(\cdot), v(\cdot)] = (1/2) \int_0^{\infty} \left(q \cdot z^T \cdot z + r \cdot v^T \cdot v - 2r \cdot (\hat{S} \cdot z)^T \cdot F(z) \right) dt,$$

где q, r – положительные числа, а \hat{S} – положительно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$(4) \quad \hat{S}A + A^T \hat{S} - \hat{S}BB^T \hat{S} + (q/r)I = 0.$$

Отличительной особенностью рассматриваемого функционала (3) является отсутствие в общем случае положительной определенности.

Можно показать, что на решениях системы (1), удовлетворяющих условию стабилизации (2), и выборе матрицы \hat{S} в виде положительно определенного решения алгебраического уравнения (4), для функционала качества (3) будет выполняться первое условие экстремума, если функция управления будет линейной функцией координат вида:

$$(5) \quad v = -B^T \hat{S} z,$$

Заметим, что полученное управление (5) совпадает с известным управлением для системы (1), не содержащей нелинейную функцию F .

Нетрудно заметить, что при управлении (5) система (1) будет иметь вид

$$(6) \quad \dot{z} = (A - BB^T \hat{S}) \cdot z + F(z), z(0) = z^0,$$

Для дальнейшего построения введем предполагаемую функцию Ляпунова в виде

$$(7) \quad V_{lin}(z(t)) = r \cdot (z^T(t) \cdot \hat{S} \cdot z(t)),$$

что обеспечивает положительную определенность функции (7) при $\forall z \neq 0$. Функция (7) есть не что иное, как функция Ляпунова для линейной задачи, без учета нелинейных слагаемых исходной системы (1). В каких случаях функция (7) может выполнять роль функции Ляпунова для нелинейной задачи будет обсуждаться далее.

Нетрудно показать, что производная по времени предполагаемой функции Ляпунова (7) на решениях системы (6) равна

$$(8) \quad \frac{d}{dt} V_{lin}(z(t)) = -q \cdot (z^T z) - r \cdot (z^T M_1 z) + 2r \cdot (z^T \hat{S} F),$$

где неотрицательно определенная матрица M_1 имеет вид:

$$(9) \quad M_1 = (B^T \hat{S})^T \cdot (B^T \hat{S})$$

Если в исходной СНДУ (1) отсутствуют «не охваченные управлением» слагаемые $F(z)$, то функция (7) является функцией Ляпунова, что следует из равенств (8) и (9). В этом случае реализуется глобальная асимптотическая устойчивость начала координат при наличии управления вида (5). Наличие слагаемых $F(z)$ в СНДУ (1), в зависимости от значений параметров b_1, b_2, η , может приводить к двум случаям.

1) Если выполняется неравенство

$$(10) \quad (z^T \hat{S} F) \leq 0 \quad \forall z \in R^2,$$

то асимптотическая устойчивость начала координат продолжает быть глобальной и функция (7) остается функцией Ляпунова.

2) Если условие (10) не выполняется, то выбранные функции управления (5) обеспечивают локальную асимптотическую устойчивость начала координат, и поэтому существует множество начальных условий, при которых траектории стремятся к началу координат. При этом не обязательно, чтобы начальные значения $z(0)$ были бы расположены только в малой окрестности начала координат. Однако все равно в этом случае функция (7) также не будет функцией Ляпунова в общепринятом смысле, который подразумевает глобальную асимптотическую устойчивость.

3. Фазовые портреты при различных значениях параметров

В отсутствии управления (при $b_1 = b_2 = 0$), фазовые портреты исходной системы (1) будут качественно отличаться при изменении знака параметра η , что видно из рис. 1.

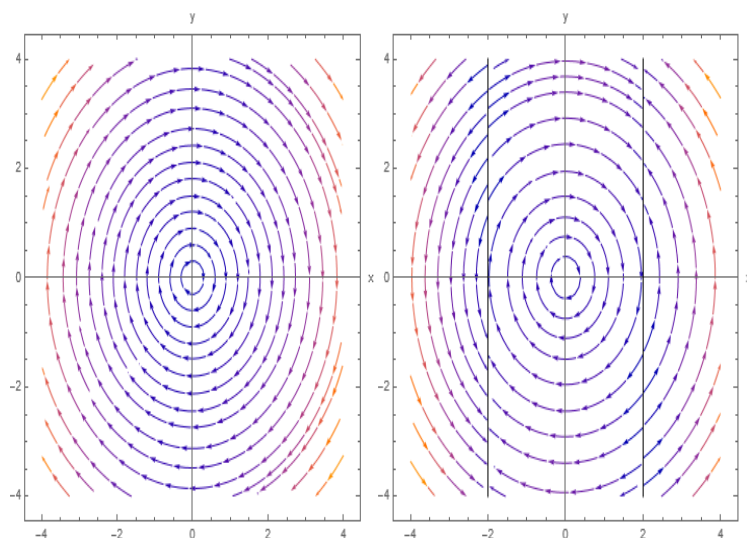


Рис.1. Фазовые портреты системы (1) без управления при различных значениях η . Слева : $\eta=1$, справа – $\eta=-1/4$.

Оба случая имеют аналитическое решение в полярных координатах ρ, φ :

$$\rho = const, \dot{\varphi} = -1 - \eta \cdot \rho^2 \cdot (\cos\varphi)^2.$$

При положительном значении η траектории в фазовом пространстве (x, y) являются окружностями, движение по которым осуществляется с периодом $T = 2\pi(1 + \eta \cdot \rho^2)^{-1/2}$ и происходит по часовой стрелке (см. рис. 1).

При отрицательном значении η траекториями являются окружности с малым радиусом $\rho < (-\eta)^{-1/2}$ или только часть окружностей большего радиуса $\rho > (-\eta)^{-1/2}$. В последнем случае движение прекращается при достижении одной из прямых $x = \pm(-\eta)^{-1/2}$. Движение в области между этими прямыми происходит по часовой стрелке, а вне этих прямых – в обратную сторону. Точки равновесия: начало координат и все точки прямых $x = \pm(-\eta)^{-1/2}$.

Поскольку для системы (1) критерий управляемости Калмана допускает только два варианта матрицы B , то рассмотрим их отдельно. Вариант управления по обеим координатам ($b_1 = b_2 = 1$). В этом случае диагональная матрица $\hat{S} = (q/r)^{1/2} \cdot I$ является единственным симметричным положительно определенным решением матричного уравнения Риккати (4). Тогда, согласно формуле (6), СНДУ (1) при наличии такого управления имеет вид системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(q/r)^{1/2} & 1 \\ -1 & -(q/r)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} x^2 \cdot y \\ -x^3 \end{pmatrix},$$

которая при все значений η имеет лишь одну точку равновесия – начало координат.

При этом функция $V_{lin}(x(t), y(t))$, определенная формулой (7), является функцией Ляпунова, поскольку для нее выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt} V_{lin}(x(t), y(t)) = -2q \cdot (x^2 + y^2) \forall x, y.$$

Таким образом, для любых значений параметра η при управлении по обеим координатам начало координат является единственной асимптотически устойчивой точкой по всем пространству, что показано на рис. 2.

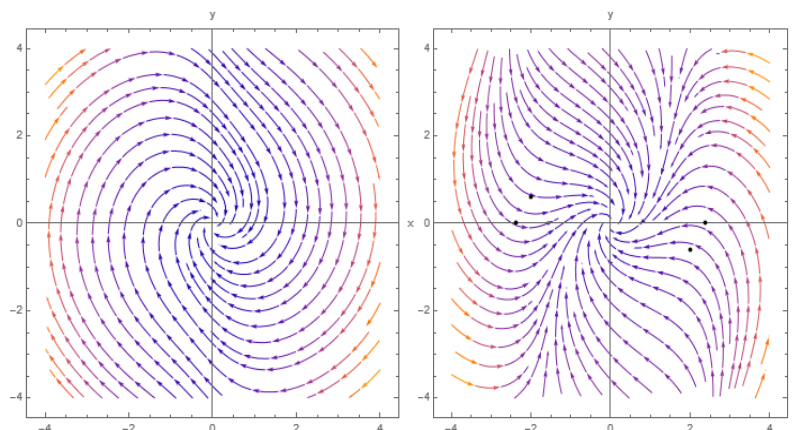


Рис. 2. Фазовые портреты системы (1) при управлении ($b_1 = b_2 = 1, q/r = 1$). Слева: $\eta=1$, справа $-\eta=-1/4$.

Вариант управления по второй координате ($b_1 = 0, b_2 = 1$). В этом случае единственным симметричным положительно определенным решением матричного уравнения Риккати (4) является матрица

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}, \alpha = \beta \cdot (\gamma + 1), \beta = \sqrt{q/r + 2\sqrt{1 + q/r} - 2}, \gamma = \sqrt{1 + q/r} - 1$$

Тогда, согласно формуле (6), АСНДУ (1) при наличии такого управления имеет вид системы двух дифференциальных уравнений

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\gamma + 1) & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \eta \cdot \begin{pmatrix} x^2 \cdot y \\ -x^3 \end{pmatrix}.$$

Система (11) при $\eta > 0$ имеет только одну точку равновесия – начало координат, а при $\eta < 0$, кроме начала координат система имеет четыре точки равновесия:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \{((1 + \gamma) \cdot (-\eta))^{-1/2}, 0\}, \bar{z}_2 = \{-((1 + \gamma) \cdot (-\eta))^{-1/2}, 0\}, \\ \bar{z}_3 &= \{((-\eta))^{-1/2}, -(\gamma/\beta) \cdot ((-\eta))^{-1/2}\}, \bar{z}_4 = \{-((-\eta))^{-1/2}, (\gamma/\beta) \cdot ((-\eta))^{-1/2}\}. \end{aligned}$$

Линеаризация системы ДУ (11) в окрестности точек равновесия $\{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4\}$ показывает, что первые две точки являются устойчивыми фокусами, а вторые две – седлами. Заметим, что x -координаты седел лежат на прямых точек равновесия $x = \pm(-\eta)^{-1/2}$, фигурировавших в системе (1) без управления. На правом рис. 3 указанные прямые показаны пунктирными линиями, которые при управлении ($b_1 = 0, b_2 = 1, q/r = 1$) оказываются сепаратрисами седел.

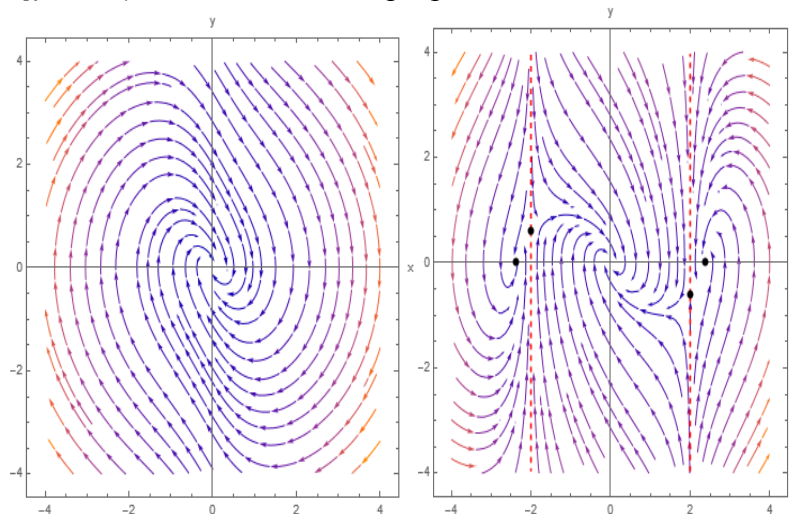


Рис. 3. Фазовые портреты системы (1) при управлении ($b_1 = 0, b_2 = 1, q/r = 1$). Слева: $\eta=1$, справа – $\eta = -1/4$. Черными точками отмечены точки равновесия. Пунктирными линиями показаны сепаратрисы двух седел. Область между сепаратрисами является инвариантной областью притяжения начала координат.

4. Заключение

Введение нового вида функционала качества управления и использование возможности построения сепаратрис седел в обратном времени в пакете Mathematica позволяет находить инвариантные области притяжения начала координат в задачах стабилизации систем двух нелинейных дифференциальных уравнений. Новый функционал не является в общем случае положительно определенным, поэтому при нахождении функции управления используется только выполнение первого условия экстремальности, а не требование минимальности. Рассмотренная в данной работе задача показывает, что именно существование множества точек равновесия в нелинейной системе оказывает существенные трудности при определении инвариантной области притяжения начала координат.

Список литературы

1. Афанасьев В.Н. Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: ЛЕНАНД, 2015. 224 с.
2. Каменецкий В.А. Построение областей притяжения методом функции Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1994. № 6. С. 10-26.