УДК 517.95, 517.97

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ С ТРЕХКОМПОНЕНТНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Л.Г. Шагалова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, Софьи Ковалевской ул., 16

E-mail: shag@imm.uran.ru

Ключевые слова: уравнение Гамильтона-Якоби, обобщенные решения, вязкостные решения, характеристики, оптимальное управление, функция цены.

Аннотация: На ограниченном отрезке времени рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения Гамильтона-Якоби с гамильтонианом, зависящим от фазовой и импульсной переменных. При этом зависимость от импульсной переменной экспоненциальна. Размерность фазового пространства равна единице. Область, в которой рассматривается уравнение, состоит из трех подобластей, в каждой из которых гамильтониан непрерывен и является вогнутым по импульсной переменной. На границах подобластей гамильтониан разрывен по фазовой переменной. На основе вязкостного подхода вводится определение обобщенного решения рассматриваемой задачи. Приведены достаточные условия, при которых справедлива теорема существования и единственности введенного обобщенного решения. Доказательство теоремы основано на решении задачи оптимального управления.

1. Введение

Задачи с экспоненциальной зависимостью гамильтониана от импульсной переменной нетипичны для теории уравнений Гамильтона-Якоби. В то же время подобные задачи возникают в прикладных исследованиях, в частности, в молекулярной генетике (см., например, [6]), и требуют изучения. Данная работа продолжает исследования, начатые в [2, 3], где рассматривались соответственно задача с фазовыми ограничениями и задача с трехкомпонентным гамильтонианом, непрерывные компоненты которого выпуклы по импульсной переменной. В данной работе рассматривается случай трехкомпонентного гамильтониана, непрерывные компоненты которого вогнуты по импульсной переменной. При этом, в отличие от случая выпуклых компонент, в рассматриваемой здесь задаче характеристики [7], выпускаемые с начального многообразия, могут быть непродолжимыми, а соответствующие импульсные компоненты при этом стремятся к бесконечным значениям. Кроме того, в средней области существуют точки, через которые не проходит ни одна характеристика, выпущенная с начального многообразия.

Отмеченные обстоятельства не позволяют перенести результаты работы [3] на рассматриваемый случай.

В работе на основе вязкостного подхода [4, 5] дано определение обобщенного непрерывного решения рассматриваемой задачи с разрывным по фазовой переменной гамильтонианом. Выделены достаточные условия, при которых это обобщенное решение существует и единственно. Доказательство теоремы существования и единственности решения конструктивно и разбивается на три этапа. На первых двух этапах решение строится в крайних областях с помощью метода характеристик Коши. При этом в этих областях решение является гладким. Построенные компоненты задают значения искомого решения в средней области, и мы таким образом приходим к необходимости решения задачи типа Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка. Для решения полученной задачи Дирихле рассматривается вспомогательная задача оптимального управления. Искомая компонента обобщенного решения совпадает с функцией цены этой задачи управления.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача Коши.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \in (0,T),\, x \in R \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in R. \tag{2}$$

Здесь T – фиксированный момент, $u_0(\cdot)$ является непрерывно дифференцируемой глобально липшицевой функцией.

Также заданы непрерывно дифференцируемые функции $h(\cdot) : R \to R$, $f(\cdot) : R \to R$ и $g(\cdot) : R \to R$ такие, что f монотонно убывает, а g монотонно возрастает. Предполагаем, что существуют точки x_* и x^* такие, что $f(x_*) = 0$, $g(x^*) = 0$, и $x_* < x^*$.

Задача (1), (2) рассматривается в предположении, что гамильтониан имеет вид

$$H(x,p) = \begin{cases} -g(x_*)e^{-p}, & x \leqslant x_*,\, p \in R \\ h(x) - f(x)e^{p} - g(x)e^{-p}, & x_* < x < x^*,\, p \in R \\ -f(x^*)e^{p}, & x \geqslant x^*,\, p \in R. \end{cases} \tag{3}$$

Определим области

$$G_- = \{(t,x) | 0 < t < T,\, x \leqslant x_*\}, \quad G_+ = \{(t,x) | 0 < t < T,\, x \geqslant x^*\},$$

$$G_0 = \{(t,x) | 0 < t < T,\, x_* < x < x^*\}, \quad \overline{G}_0 = \{(t,x) | 0 < t < T,\, x_* \leqslant x \leqslant x^*\}.$$

В каждой из областей G_-, $\overline{G}_0$, G_+ гамильтониан H (3) непрерывен и является вогнутым по импульсной переменной p. В области G_0 гамильтониан удовлетворяет условию коэрцитивности

$$H(x,p) \to -\infty \quad \text{при} \quad |p| \to \infty \tag{4}$$

а в областях $\overline{G}_0$, G_- и G_+ это условие нарушается.

Задача (1)–(3) не имеет классического решения, и для нее не выполняются условия существования известных обобщенных решений (вязкостного [4, 5] и минимаксного [1]). Требуется определить обобщенное решение рассматриваемой задачи и исследовать вопросы его существования и единственности.

3. Обобщенное решение

Непрерывное обобщенное решение задачи (1)–(3) вводится на основе вязкостного подхода. Прежде чем дать определение решения, напомним одно из эквивалентных определений вязкостного решения для уравнения Гамильтона- Якоби с непрерывным гамильтонианом. Приведем его для актуального в данной работе случая одномерной фазовой переменной.

Пусть I – открытый интервал, $W = (0,T) \times I$, $\overline{W} = (0,T) \times clI$. Здесь clI – замыкание I. Символом $C(W)$ будем обозначать класс функций, непрерывных на множестве W, а символами $D^{-}u(t,x)$ и $D^{+}u(t,x)$ – соответственно суб- и супердифферециал функции $u(\cdot)$ в точке (t,x). .

Определение 1. *Функция* $u \in C(W)$ *– вязкостное решение уравнения* (1) *на множестве* W*, если выполнены следующие неравенства*

$$a + H(x,s) \leqslant 0 \ \ \forall\,(t,x) \in W, \ \forall\,(a,s) \in D^{+}u(t,x), \tag{5}$$

$$a + H(x,s) \geqslant 0 \ \ \forall\,(t,x) \in W, \ \forall\,(a,s) \in D^{-}u(t,x). \tag{6}$$

Функция $u \in C(\overline{W})$ *– вязкостное решение уравнения* (1) *на множестве* $\overline{W}$*, если* $\forall\,(t,x) \in \overline{W}$ *выполнено неравенство* (6)*, и* $\forall\,(t,x) \in W$ *выполнено неравенство* (5)*.*

Определение 2. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) *назовем непрерывную функцию* $u(\cdot) : [0,T] \times R \to R$*, удовлетворяющую начальному условию* (2)*, и такую, что*

1) *сужение* $u_{|G_0}(\cdot)$ *на множество* G_0 *является на этом множестве вязкостным решением уравнения* (1) *с гамильтонианом* (3)*;*

2) *сужения* $u_{|G_-}(\cdot)$ *и* $u_{|G_+}(\cdot)$ *на множества* G_- *и* G_+ *соответственно являются на этих множествах вязкостными решениями уравнения* (1) *с гамильтонианом* (3)*.*

4. Основной результат

Рассмотрим характеристическую систему для уравнения (1) с гамильтонианом (3) в области G_0

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = -f(x)e^{p} + g(x)e^{-p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) = -h'(x) + f'(x)e^{p} + g\prime(x)e^{-p}, \\ \dot{u} &= pH_p(x,p) - H(x,p). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь H_x и H_p обозначают частные производные гамильтониана по переменным x и p соответственно, f' – производная функции f. Система рассматривается с начальными условиями

$$x(0) = y, \ p(0) = u_0'(y), \ u(0) = u_0(0), \quad x_* < y < x^*. \tag{8}$$

Предположение 1. *Будем предполагать, что выполнено следующее условие* **A.** *Решения системы* (7),(8) *продолжимы до момента* T.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* **A** *и производная* $u_0'(\cdot)$ *начальной функции не возрастает на интервалах* $(-\infty, x_*)$ *и* (x^*, ∞). *Тогда в задаче* (1)–(3) *существует и единственно обобщенное в смысле определения* 2 *решение* $u(t,x) : [0,T] \to R$. *При этом функция* $u(t,x)$ *является субдифференцируемой, т.е.*

$$D^- u(t,x) \neq \varnothing \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times R$$

.

Доказательство. Вначале решение строится в областях G_- и G_+. В этих областях характеристики являются параллельными прямыми линиями.

Например, в области G_+ гамильтониан имеет вид $H(x,p) = -f(x^*)e^p$, а соответствующая характеристическая система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = -f(x^*)e^p, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) = 0, \\ \dot{u} &= pH_p(x,p) - H(x,p) = (p-1)H(x,p). \end{aligned} \tag{9}$$

Из системы (9) следует, что фазовые компоненты характеристик являются прямыми линиями вида $x = x_0 - f(x_0)e^{p_0}t$.

По условию теоремы производная начальной функции не возрастает на интервалах $(-\infty, x_*)$ и (x^*, ∞). Поэтому через каждую точку в областях G_- и G_+ проходит единственная характеристика, выпущенная с начального многообразия. Таким образом, применяя метод характеристик, можно построить функции $u_-(\cdot)$ и $u_+(\cdot)$, являющиеся вязкостными решениями уравнения (1), удовлетворяющими начальному условию (2), в областях G_- и G_+ соответственно. Такие функции определяются единственным образом. При этом во внутренних точках множеств G_- и G_+ соответственно функции $u_-(\cdot)$ и $u_+(\cdot)$ являются гладкими и удовлетворяют уравнению (1) с гамильтонианом вида (3).

Далее необходимо определить решение $u(\cdot)$ в области G_0. При этом должно выполняться начальное условие (2) и слелующие условия на границах области

$$u(t,x_*) = u_-(t,x_*), \quad u(t,x^*) = u_+(t,x^*), \qquad 0 < t < T$$

Таким образом, приходим к задаче Дирихле. При выполнении условия **A** решение $u(\cdot)$ этой задачи единственно. Из условия **A** следует, что компоненты $p(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ характеристической системы (7),(8) ограничены и их значения содержатся в некотором ограниченном отрезке $P \subset R$.

Решение полученной задачи Дирихле может быть найдено с помощью рассмотрения следующей вспомогательной задачи управления **OCP**. Динамика управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = -H_p(x,p) = f(x)e^p - g(x)e^{-p}, \quad p \in P. \tag{10}$$

Система (10) рассматривается на множестве $\Pi_T = [0,T] \times [x_*, x^*]$. Значения управляющего параметра p выбираются из отрезка P. Если задано начальное состояние системы $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in \Pi_T$, то допустимыми управлениями являются измеримые функции $p : [t_0, T] \to P$. Множество всех допустимых управлений обозначим символом $\mathbf{P}_{[t_0,T]}$.

На движениях системы (10) определим функционал платы

$$I_{(t_0,x_0)}(p(\cdot)) = \int_{t_0}^{\tau} p(s)H_p(x(s),p(s)) - H(x(s),p(s))ds + \varphi(x(\tau)),$$

где

$$\varphi(x(\tau)) \begin{cases} u_0(x_0), & \text{если } \tau = T, \\ u_-(T-\tau, x_*), & \text{если } t_0 < \tau < T,\ x(\tau) = x_*, \\ u_+(T-\tau, x^*), & \text{если } t_0 < \tau < T,\ x(\tau) = x^*. \end{cases}$$

Задача оптимального управления **OCP** состоит в управлении системой (10) таким образом, чтобы обеспечить оптимальный результат (цену), который определяется соотношением

$$V(t_0, x_o) = \inf_{p(\cdot)\in \mathbf{P}[t_0,T]} I_{(t_0,x_0)}(p(\cdot)).$$

По схеме, аналогичной использованной в [2], можно показать, что в области G_0 искомое решение $u(t,x)$ строится с помощью функции цены задачи управления **OCP** следующим образом

$$u(t,x) = V(T-t, x), \quad t \in [0,T],\ x \in [x_*, x^*].$$

Таким образом, построена непрерывная на множестве $[0,T] \times R$ функция $u(t,x)$. По построению эта функция удовлетворяет начальному условию (2), и в областях G_-, G_0, G_+ выполнены дифференциальные неравенства (5), (6). Нетрудно показать, что сужения функции u на множества G_-0 и G_+0 являются на этих множествах вязкостными решениями уравнения (1), и, значит, функция u удовлетворяет определению 2. Субдифференцируемость построенной функции доказывается по схеме, использованной в доказательстве теоремы 3 в работе [2].

Список литературы

1. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
2. Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, Вып 2. С. 191–208.
3. Шагалова Л.Г. Непрерывное обобщенное решение уравнения Гамильтона–Якоби с трехкомпонентным гамильтонианом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, Вып. 1. С. 257–268.
4. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton-Jacobi equations with state constraints // Transactions of the American Mathematical Society. 1990. Vol. 318, No. 2. P. 643–683.
5. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 377, No. 1. P. 1–42.
6. Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A. Dynamics of the Eigen and the Crow-Kimura models for molecular evolution // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 78, No. 4. 041908.
7. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Mathematics and its Applications. 2004. Vol. 20. P. 2955–3091.