УДК 517.9

О НЕРАВЕНСТВАХ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.В. Арутюнов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: arutyunov@cs.msu.ru

З.Т. Жуковская
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: zyxra2@yandex.ru

С.Е. Жуковский
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Ключевые слова: неравенство среднего значения, оптимальное управление, дифференциальное включение.

Аннотация: При исследовании управляемых систем и задач оптимального управления возникает необходимость получения оценок производных функций нескольких переменных. Одним из инструментов решения такой задачи являются неравенства среднего значения. В настоящей работе получены новые неравенства среднего значения для гладких и локально липшицевых функций. Проведено сравнение полученных результатов с известными.

1. Введение

При исследовании ряда дифференциальных включений, управляемых систем и задач оптимального управления важную роль играют утверждения, называемые неравенствами среднего значения. Под такими неравенствами понимаются утверждения об оценке производной функции нескольких переменных в некоторой точке области определения по некоторой информации о ее значениях. Сформулируем одно хорошо известное утверждение такого типа (см., например, [1, гл. 5, §3]).

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – заданная дифференцируемая функция, $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ – заданный шар радиуса $R > 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует точка $\xi \in \mathcal{B}$ такая, что

$$(1) \qquad |f'(\xi)| \leqslant \frac{1}{2R}(\max_{x\in\mathcal{B}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{B}} f(x)).$$

Здесь и далее $f'(\xi)$ – это производная функции f в точке ξ, $|v| = \Bigl(\sum_{j=1}^{n} v_j^2\Bigr)^{1/2}$ для $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. Доказательство этого утверждения основано на использовании вариационного принципа Экланда (см., например, [1, гл. 5, §3]).

Это утверждение получило свое развитие в работах [2, 3]. Соответствующие результаты применяются при исследовании множеств достижимости управляемых систем (см. [4]), получении необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления (см. [5]), получении условий слабой инфариантности дифференциальных включений (см. [2]) и др.

В настоящей работе мы получим два утверждения о неравенствах среднего значения для локально липшицевых и гладких функций и сравним их с известными результатами. Первое утверждение будет доказано с использованием стандартного метода, основанного на вариационном принципе Экланда. Второе утверждение будет доказано с помощью сведения задачи о неравенстве к некоторой краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения и применения к ней известных теорем существования.

2. Основные результаты

Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ локально липшицева, если для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существуют окрестность O и число $\beta \geqslant 0$ такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \beta|x_1 - x_2|$ для любых $x_1, x_2 \in O$.

Для функции f обозначим через Ω_f множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых f дифференцируема. По теореме Радемахера для локально липшицевой функции f множество Ω_f имеет полную меру и, в частности, всюду плотно в $\mathbb{R}^n$. Поэтому для такой функции при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ корректно определено множество $\partial f(x)$, представляющее собой выпуклую оболочку множества

$$\Bigl\{v \in \mathbb{R}^n : \, f'(x_n) \to v, \quad \{x_n\} \subset \Omega_f, \quad x_n \to x\Bigr\}.$$

Множество $\partial f(x)$ называется производной Кларка функции f в точке x. Подробно свойства этой производной исследованы в [6].

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ – заданный шар радиуса $R > 0$. Обозначим его границу через $\mathcal{S}$.

Теорема 1. *Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ локально липшицева, то существует точка $\xi \in \mathcal{B}$ и вектор $v \in \partial f(\xi)$ такие, что*

$$(2) \qquad |v| \leqslant \frac{1}{2R}\Bigl(\max_{x\in\mathcal{S}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{S}} f(x)\Bigr).$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что минимум или максимум функции f на шаре $\mathcal{B}$ достигается во внутренней точке шара ξ. Тогда в силу необходимых условий оптимальности из [6] имеет место включение $0 \in \partial f(\xi)$. Таким образом, в рассматриваемом случае утверждение теоремы выполняется при $v = 0$.

Предположим теперь, что и минимум и максимум функции f на шаре $\mathcal{B}$ достигаются только в точках границы $\mathcal{S}$. Предположим также, что

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}(\max_{x\in\mathcal{B}} f(x) + \min_{x\in\mathcal{B}} f(x)).$$

Применим к функции f вариационный принцип Экланда в точке x_0 при

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\Big(\max_{x\in\mathcal{B}} f(x) + \min_{x\in\mathcal{B}} f(x)\Big) - f(x_0), \quad 0 < \lambda < R.$$

Для указанного ε имеем $f(x_0) \leqslant \min\limits_{x\in\mathcal{B}} f(x) + \varepsilon$.

В силу вариационного принципа существует точка $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$ такая, что $|x_\lambda - x_0| < \lambda$ и

$$f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}|x_\lambda - x_0| > f(x_\lambda) \quad \forall\, x \in \mathcal{B}: \quad x \neq x_\lambda.$$

Отсюда (см. [6]) получаем, что существует вектор $v_\lambda \in \partial f(x_\lambda)$ такой, что $|v_\lambda| \leqslant \varepsilon/\lambda$. Для этого вектора имеем

$$|v_\lambda| \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}\Big(\max_{x\in\mathcal{B}} f(x) + \min_{x\in\mathcal{B}} f(x) - 2f(x_0)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\lambda}\Big(\max_{x\in\mathcal{B}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{B}} f(x)\Big) = \frac{1}{2\lambda}\Big(\max_{x\in\mathcal{S}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{S}} f(x)\Big).$$

Поскольку это неравенство выполняется при λ множество $\mathcal{B}$ компактно, а многозначное отображение $x \mapsto \partial f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ полунепрерывно сверху, то существует предельная (при $\lambda \to R - 0$) точка $\xi \in \mathcal{B}$ множества $\{x_\lambda : 0 < \lambda < R\}$ и предельная точка $v \in \mathbb{R}^n$ множества $\{v_\lambda : 0 < \lambda < R\}$ такие, что $v \in \partial f(x_\lambda)$ и имеет место (2).

Предположим теперь, что

$$f(x_0) > \frac{1}{2}(\max_{x\in\mathcal{B}} f(x) + \min_{x\in\mathcal{B}} f(x)).$$

Тогда применяя приведенные выше рассуждения к функции $-f$ получаем существование искомых точек $\xi \in \mathcal{B}$ и $v \in \partial f(\bar{x})$. Теорема 1 доказана.

Применительно к непрерывно дифференцируемым функциям теорема 1 дает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, то существует точка $\xi \in \mathcal{B}$ такая, что*

$$|f'(\xi)| \leqslant \frac{1}{2R}\Big(\max_{x\in\mathcal{S}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{S}} f(x)\Big). \tag{3}$$

Это утверждение вытекает из теоремы 1, поскольку для непрерывно дифференцируемых функций f имеет место тождество $\partial f(x) \equiv \{f'(x)\}$.

Поскольку $\mathcal{S}$ является собственным подмножеством шара $\mathcal{B}$, то оценка (3) точнее оценки (2). А именно права часть неравенства (3) меньше либо равна правой части неравенства (2), т.е.

$$\frac{1}{2R}\Big(\max_{x\in\mathcal{S}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{S}} f(x)\Big). \leqslant \frac{1}{2R}\Big(\max_{x\in\mathcal{B}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{B}} f(x)\Big). \tag{4}$$

и существуют функции f, для которых это неравенство является строгим. В качестве такой функции f можно взять функцию, которая постоянна на $\mathcal{S}$, но не является постоянной на $\mathcal{B}$. Для нее левая часть неравенства (4) равна нулю, а правая – положительна. Таким образом, теорема 1 обобщает известное неравенство среднего значения.

Пусть далее $x_0 = 0$, т.е. $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ – это заданный шар радиуса $R > 0$ с центром в нуле. Тогда для непрерывно дифференцируемой четной функции f неравенство (1) выполняется автоматически при $\xi = 0$, поскольку левая часть этого неравенства равна нулю. При этом правая часть неравенства может быть положительной и сколь угодно большой. Поэтому, возникает естественная задача усилить неравенство (1) так, чтобы для четных функций f оно выполнялось как равенство.

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема. Тогда*

$$\exists\, \xi \in \mathcal{B}: \quad |f'(\xi)| \leqslant \frac{1}{2R} \max_{x\in\mathcal{B}} (f(x) - f(-x)). \tag{5}$$

Доказательство теоремы 2. Если $f'(\xi) = 0$ в некоторой точке $\xi \in \mathcal{B}$, то эта точка является искомой. Поэтому далее будем предполагать, что $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathcal{B}$. Тогда в силу непрерывной дифференцируемости функции f существует открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\mathcal{B} \subset \Omega$ и $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in \Omega$.

Положим

$$\varepsilon := \min_{x\in\mathcal{B}} |f'(x)|, \quad \tau := 2\varepsilon R.$$

По предположению $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} \in \left\{ \frac{f'(x)}{|f'(x)|^2} \right\}, \quad x(0) + x(\tau) = 0, \quad x(t) \in \mathcal{B}, \quad t \in [0, \tau].$$

Применим к этой задаче теорему о существовании решения из [7]. Для многозначного отображения $G(x) := \{f'(x)/|f'(x)|^2\}$ выполняется предположение **(A1)** из [7], поскольку функция f непрерывно дифференцируема и $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in \Omega$. Кроме того,

$$\gamma := \max_{x\in\mathcal{B}} \left| \frac{f'(x)}{|f'(x)|^2} \right| = \max_{x\in\mathcal{B}} \frac{1}{|f'(x)|} = \frac{1}{\min\limits_{x\in\mathcal{B}} |f'(x)|} = \varepsilon^{-1}.$$

Значит, $\gamma\tau \leqslant 2R$. Поэтому в силу [7] существует абсолютно непрерывная функция $\bar{x} : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\dot{\bar{x}}(t) \equiv \frac{f'(\bar{x}(t))}{|f'(\bar{x}(t))|^2}, \quad \bar{x}(0) + \bar{x}(\tau) = 0, \quad \bar{x}(t) \in \mathcal{B}, \quad t \in [0, \tau]. \tag{6}$$

Имеем

$$f(\bar{x}(\tau)) - f(\bar{x}(0)) = \int\limits_0^\tau \langle f'(\bar{x}(t)), \dot{\bar{x}}(t) \rangle \, dt = \int\limits_0^\tau \left\langle f'(\bar{x}(t)), \frac{f'(\bar{x}(t))}{|f'(\bar{x}(t))|^2} \right\rangle dt = \tau.$$

Здесь первое равенство – это формула Ньютона-Лейбница, а второе равенство вытекает из тождества в (6). Отсюда, поскольку в силу (6) имеет место равенство $\bar{x}(0) = -\bar{x}(\tau)$, то полагая $x_* := \bar{x}(\tau)$ получаем, что

$$f(x_*) - f(-x_*) = f(\bar{x}(\tau)) - f(-\bar{x}(\tau)) = f(\bar{x}(\tau)) - f(\bar{x}(0)) = \tau = 2\varepsilon R.$$

Из последнего равенства получаем, что

$$\varepsilon = \frac{1}{2R}\Big(f(x_*) - f(-x_*)\Big) \leqslant \frac{1}{2R}\max_{x\in\mathcal{B}}\Big(f(x) - f(-x)\Big).$$

Отсюда и из того, что $\varepsilon = \min\limits_{x\in\mathcal{B}} |f'(x)|$, получаем (5).

Сравним неравенства (1) и (5). Во-первых, для правых частей неравенств (1) и (5) очевидно справедливо соотношение

$$\max_{x\in\mathcal{B}}\Big(f(x) - f(-x)\Big) \leqslant \max_{x\in\mathcal{B}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{B}} f(x).$$

Во вторых, для произвольной четной на $\mathcal{B}$ функции f, не являющейся постоянной, правая часть в (1) положительна, а правая часть в (5) равна нулю. Таким образом, оценка (5) сильнее оценки (1), и неравенство в (5) превращается в равенство для четных функций f.

Отметим также, что оценки (3) и (5) независимы. Действительно, для четных функций f правая часть в (5) равна нулю, а правая часть в (3) может быть сколь угодно большой. С другой стороны, если функция f постоянна на $\mathcal{S}$ и не является постоянной на всем шаре $\mathcal{B}$, то правая часть в (3) равна нулю, а правая часть в (5) может быть сколь угодно большой.

Используя стандартную процедуру сглаживания [8] из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция f локально липшицева. Тогда существует точка $\xi \in \mathcal{B}$ и вектор $v \in \partial f(\xi)$ такие, что $|v| \leqslant \frac{1}{2R}\max\limits_{x\in\mathcal{B}}(f(x) - f(-x))$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00012, https://rscf.ru/project/24-21-00012/).

Список литературы

1. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. N.Y.: John Wiley & Sons, 1984. 518 P.
2. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S. Mean Value Inequalities in Hilbert Space // Transactions of the American Mathematical Society. 1994. Vol. 344, No. 1. P. 307–324.
3. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Вариационные принципы в нелинейном анализе и их обобщение // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 6. С. 948–954.
4. Clarke P.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // Journal of Dynamical and Control Systems. 1995. Vol. 1. P. 1–48.
5. Clarke F. Necessary Conditions in Dynamic Optimization // Memoirs of the American Mathematical Society. 2005. Vol. 173. 113 P.
6. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука, 1988, 280 С.
7. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. О нелинейных краевых задачах для дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 11. С. 1443–1450.
8. Pourciau B.H. Analysis and Optimization of Lipschitz Continuous Mappings // Journal of Optimization Theory and Applications. 1977. Vol. 22, No. 3. P. 311–351.