Здесь первое равенство – это формула Ньютона-Лейбница, а второе равенство вытекает из тождества в (6). Отсюда, поскольку в силу (6) имеет место равенство $\bar{x}(0) = -\bar{x}(\tau)$, то полагая $x_* := \bar{x}(\tau)$ получаем, что

$$f(x_*) - f(-x_*) = f(\bar{x}(\tau)) - f(-\bar{x}(\tau)) = f(\bar{x}(\tau)) - f(\bar{x}(0)) = \tau = 2\varepsilon R.$$

Из последнего равенства получаем, что

$$\varepsilon = \frac{1}{2R}\Big(f(x_*) - f(-x_*)\Big) \leqslant \frac{1}{2R}\max_{x\in\mathcal{B}}\Big(f(x) - f(-x)\Big).$$

Отсюда и из того, что $\varepsilon = \min\limits_{x\in\mathcal{B}} |f'(x)|$, получаем (5).

Сравним неравенства (1) и (5). Во-первых, для правых частей неравенств (1) и (5) очевидно справедливо соотношение

$$\max_{x\in\mathcal{B}}\Big(f(x) - f(-x)\Big) \leqslant \max_{x\in\mathcal{B}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{B}} f(x).$$

Во вторых, для произвольной четной на $\mathcal{B}$ функции f, не являющейся постоянной, правая часть в (1) положительна, а правая часть в (5) равна нулю. Таким образом, оценка (5) сильнее оценки (1), и неравенство в (5) превращается в равенство для четных функций f.

Отметим также, что оценки (3) и (5) независимы. Действительно, для четных функций f правая часть в (5) равна нулю, а правая часть в (3) может быть сколь угодно большой. С другой стороны, если функция f постоянна на $\mathcal{S}$ и не является постоянной на всем шаре $\mathcal{B}$, то правая часть в (3) равна нулю, а правая часть в (5) может быть сколь угодно большой.

Используя стандартную процедуру сглаживания [8] из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция f локально липшицева. Тогда существует точка $\xi \in \mathcal{B}$ и вектор $v \in \partial f(\xi)$ такие, что $|v| \leqslant \frac{1}{2R}\max\limits_{x\in\mathcal{B}}(f(x) - f(-x))$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00012, https://rscf.ru/project/24-21-00012/).

Список литературы

1. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. N.Y.: John Wiley & Sons, 1984. 518 P.
2. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S. Mean Value Inequalities in Hilbert Space // Transactions of the American Mathematical Society. 1994. Vol. 344, No. 1. P. 307–324.
3. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Вариационные принципы в нелинейном анализе и их обобщение // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 6. С. 948–954.
4. Clarke P.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Qualitative properties of trajectories of control systems: A survey // Journal of Dynamical and Control Systems. 1995. Vol. 1. P. 1–48.
5. Clarke F. Necessary Conditions in Dynamic Optimization // Memoirs of the American Mathematical Society. 2005. Vol. 173. 113 P.
6. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука, 1988, 280 С.
7. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. О нелинейных краевых задачах для дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 11. С. 1443–1450.
8. Pourciau B.H. Analysis and Optimization of Lipschitz Continuous Mappings // Journal of Optimization Theory and Applications. 1977. Vol. 22, No. 3. P. 311–351.