УДК 517.977: 534.112

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАЗЕРНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ НА ДВУХСЛОЙНЫЙ БИОМАТЕРИАЛ

В.Р. Барсегян
Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет
Армения, 0019, Ереван, пр. Баграмяна, 24
E-mail: barseghyan@sci.am

С.В. Солодуша
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, Лермонтова, 130
E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Ключевые слова: двухслойный биологический материал, лазерное воздействие, температурное состояние, управление, оптимальное управление, метод разделения переменных.

Аннотация: Рассматривается двухслойный биологический объект, который подвергается лазерному излучению. Управление процессом лазерного воздействия на границе неоднородного по своим физическим характеристикам биоматериала осуществляется изменением интенсивности температуры лазерного воздействия, влияя на тепловое состояние в биоматериале. Для задач оптимального управления критерий качества задан на всем промежутке времени. Предложен конструктивный подход построения функции управления и оптимального управления лазерным воздействием на двухслойный биоматериал. Полученные результаты иллюстрируются и анализируются на конкретном примере.

1. Введение

Многослойные физические объекты, которые находятся под сосредоточенными или распределенными воздействиями, должны описываться соответствующими математическими моделями. Биологический материал, находящийся под воздействием лазерного излучения, является системой с распределенными параметрами [1-4]. О сфере применения лазеров, а также о медико-биологическом применении лазеров отмечается, например, в работе [5].

Математическая модель процесса действия лазерного излучения на многослойный биологический материал описывается с помощью дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений теплопроводности) с соответствующими краевыми условиями в начале и в конце воздействия лазерным излучением, граничными условиями взаимодействия внешнего слоя объекта и окружающей среды, а также условиями сопряжения между слоями. Математические модели многослойных объектов характеризуются как разнородные составные системы с распределенными параметрами [3]. Следовательно, для задач управления указанными системами целесообразно использовать методы исследования задач управления составными системами (с переменной структурой), которым посвящены, в частности, статьи [6-8].

Для обработки многослойных биологических материалов возникает необходимость выработки способов воздействия и критериев для параметров лазерных излучателей. В последние годы активно разрабатываются различные математические модели, для решения разновидных задач лазерного воздействия с целью прогнозирования и оценки результатов, в том числе, задача выбора режимов теплового воздействия лазерного луча на многослойный биологический объект. При этом способы эффективных режимов воздействия лазерного излучения на многослойную биологическую среду пока еще недостаточно исследованы [1]. Поэтому необходимо проведение всесторонних исследований по поиску режимов лазерного воздействия для развития возможностей лазерной обработки и повышения эффективности ее воздействия на многослойную биологическую среду.

В настоящей работе рассмотрен многослойный объект, состоящий из двух неоднородных по своим теплофизическим характеристикам биологических слоев, подвергаемый лазерному воздействию. Предполагается, что управление и оптимальное управление процессом теплового воздействия лазерного луча осуществляется следующим образом: изменяя по времени на верхней (левой) границе двухслойного биоматериала интенсивность температуры лазерного луча, тем самым влияем на тепловое состояние в биоматериале. Для задач оптимального управления критерий качества задан на всем промежутке времени.

Цель работы состоит в разработке аналитического подхода построения функций управления и оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния из заданного начального состояния на некотором промежутке времени переходит в желаемое конечное состояние.

2. Постановка задач

Рассмотрим бесконечный по координатам x и y двухслойный биологический материал с различными теплофизическими характеристиками (коэффициентами теплопроводности, плотностью и теплоемкостью) слоев.

В соответствии с многослойной структурой объекта [2-4] в случае, когда временные и пространственные параметры функции мощности распределения (объемной плотности тепловых нагрузок в биологическом материале) и коэффициенты теплопроводности являются постоянными, математическая модель соответствует дифференциальному уравнению теплопроводности.

Рассмотрим двухслойную биологическую среду, состоящую из двух участков $0 \le z \le l_1$ и $l_1 \le z \le l_1 + l_2$. Обозначим через ρ_j– коэффициент плотности j–го слоя биологического материала, $j = 1, 2$; c_j – коэффициент теплоемкости j–го слоя биологического материала; K_j – коэффициент теплопроводности j–го слоя биологического материала; $T(z, t)$ – температурное поле в биологическом материале; z – глубину проникновения лазерного луча в биологический материал; t – длительность теплового воздействия.

Функция температурного поля $T(z, t)$, $l_1 \le z \le l_1 + l_2$, $t_0 \le t \le t_2$, в этом случае подчиняется следующему уравнению

$$(1) \qquad \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}, 0 \le z \le l_1, t_0 \le t \le t_2, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}, l_1 \le z \le l_1 + l_2, t_0 \le t \le t_2, \end{cases}, \; a_j^2 = \frac{K_j}{c_j \rho_j}, j = 1, 2.$$

Предположим, что граничные условия, соответственно, теплового воздействия на двухслойный биологический материал следующие

(2) $$T(z,t)\big|_{z=0} = u(t), T(z,t)\big|_{z=l_1+l_2} = P(t),$$
где $u(t)$ – температура действия лазерного луча левой границе объекта, которая поддается изменению по времени; $P(t)$ – температура действия лазерного луча на правой границе (в конце), которая считается известной.

Условия сопряжения между слоями, которые выражают условиями идеального теплового контакта слоев, записываются следующим образом:

(3) $$T(z,t)|_{z=l_1-0} = T(z,t)|_{z=l_1+0}, K_1 \frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=l_1-0} = K_2 \frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=l_1+0}, t \in$$
$[t_0, t_2]$.

Предполагается, что заданы начальное (при $t = t_0$)

(4) $$T(z,t)\big|_{t=t_0} = T_H(z)$$
и конечное (при $t = t_2$)

(5) $$T(z,t)\big|_{t=t_2} = T_K(z)$$
условие. Функция $u(t)$ является управляющим воздействием (т.е. граничным управлением). Предполагается, что допустимое управление $u(t)$ принадлежит $L_2[t_0, t_2]$. Функция $T(z,t) \in L_2(\Omega)$, $j = 1, 2$, где множество $\Omega = \{(z,t): z \in [0, l_1 + l_2], t \in [t_0, t_2]\}$, а функции $T_H(z)$, $T_K(z)$принадлежат $L_2(0, l_1 + l_2)$. Предполагается, что все функции такие, что выполняются соответствующие условия согласования, а также обеспечивается существование классических решений.

Задачи управления и оптимального управления процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал можно сформулировать следующим образом.

1. Требуется найти такой закон управления $u(t)$, $t \in [t_0, t_2]$ тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биологический объект, под воздействием которого распределение температурного состояния, описанного (1) с условиями (2) и (3), из начального состояния (4) на промежутке времени $[t_0, t_2]$ переходит в заданное конечное состояние (5).

2. Требуется найти такой закон оптимального управления $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биологический объект, под воздействием которого распределение температурного состояния, описанного (1) с условиями (2) и (3), из начального состояния (4) на промежутке времени $[t_0, t_2]$ переходит в заданное конечное состояние (5), и минимизирует функционал

(6) $$\int_{t_0}^{t_2} u^2(t)dt.$$

Таким образом, сформулированы задачи управления и оптимального управления системой с распределенными параметрами, граничные условия в которых являются неоднородными. Для построения решения этих задач целесообразно перейти к задачам с нулевыми граничными условиями.

3. Об основных результатах

Для построения решения поставленных задач переходим к новой переменной [7-8]

(7) $$\xi = \begin{cases} z, z \in [0, l_1], \\ \frac{a_1}{a_2} z + l_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right), z \in [l_1, l_1 + l_2]. \end{cases}$$

Замена переменной (7) приводит к растяжению или сжатию отрезка $[l_1, l_1 + l_2]$ относительно точки $z = l_1$. При этом отрезок $[l_1, l_1 + l_2]$ переходит к отрезку $[l_1, L]$, где $L = l_1 + \frac{a_1}{a_2} l_2$. Для удобства, после замены переменной (7), все вышеприведенные функции оставляем в исходных обозначениях. Следовательно, функция $T(\xi,t)$ (или уравнение (1)), $\xi \in [0,L]$, $t \in [t_0,t_2]$, удовлетворяет следующему уравнению

(8) $$\frac{\partial T(\xi,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 T(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \xi \in [0,L], t \in [t_0,t_2],$$

с соответствующими граничными условиями

(9) $$T(0,t) = u(t), T(L,t) = P(t), t_0 \le t \le t_2,$$

с начальным

(10) $$T(\xi,t_0) = T_H(\xi), \xi \in [0,L],$$

и конечным условиями

(11) $$T(\xi,t_2) = T_K(\xi), \xi \in [0,L],$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = l_1$ соединения участков

(12) $$T(\xi,t)|_{\xi=l_1-0} = T(\xi,t)|_{\xi=l_1+0}, a_2 K_1 \frac{\partial T(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=l_1-0} = a_1 K_2 \frac{\partial T(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=l_1+0}$$

$t \in [t_0,t_2]$.

В работе предложен конструктивный подход построения функций управления и оптимального управления. Схема построения заключается в следующем: исходные задачи, после замены переменной (7), описанные формулами (8)-(12) с неоднородными граничными условиями, сводятся к задачам управления и оптимального управления распределенными воздействиями, которые описываются

(13) $$\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial \xi^2} + F(\xi,t), F(\xi,t) = \frac{\xi}{L}\left[\dot{u}(t) - \dot{P}(t)\right] - \dot{u}(t), \xi \in [0,L],$$

$t \in [t_0,t_2]$, уравнением с граничными условиями $V(0,t) = V(L,t) = 0$, с соответствующими начальными и конечными состояниями, минимизируемым функционалом (6). Используя метод разделения переменных [6-9] и учитывая конечные условия, получим, что искомые функции управления и оптимального управления для каждой моды (для каждого $k = 1,2,\dots$) должны удовлетворять некоторым интегральным соотношениям

$$\int_{t_0}^{t_2} u(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau = C_k, k = 1,2,\dots,$$

$$C_k = \frac{1}{\lambda_k}\left\{\frac{\pi k}{2}\left[V_k(t_2)e^{\lambda_k t_2} - V_k(t_0)e^{\lambda_k t_0}\right] + T_K(0)e^{\lambda_k t_2} - T_H(0)e^{\lambda_k t_0} - (-1)^k \int_{t_0}^{t_2} \dot{P}(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau\right\}$$

и доставлять минимум функционалу (6) (для задач оптимального управления). Здесь $\lambda_k = \left(a_1 \frac{\pi k}{L}\right)^2$, коэффициенты Фурье функции $V(\xi,t_0)$ и $V(\xi,t_2)$ обозначены через $V_k(t_0)$ и $V_k(t_2)$ соответственно, а функция $V(\xi,t)$ есть решение уравнения (13).

Далее, на основе методов теории управления и оптимального управления конечномерными системами для произвольного числа первых мод построены функции управления и оптимального управления [6-10]. Сформулированы условия о вполне управляемости в рассмотренных задачах [10]. Явные выражения функций управления и оптимального управления представлены через заданные начальные и конечные значения функции температурного поля двухслойного биоматериала. Для некоторых числовых значений параметров биологической среды проведен вычислительный эксперимент и выполнен сравнительный анализ результатов.

Список литературы

1. Белозеров Л.Г., Киреев В.А. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. М: Физматлит, 2003. 388 с.
2. Yamaoka N., Sugie J. Multilayer structures of second-order linear differential equations of Euler type and their application to nonlinear oscillations // Ukrainian Mathematical Journal. 2006. No. 12 (58). P. 1935-1949.

3. Мегель Ю.Е., Левкин Д.А. Математическая модель теплового нагрева многослойного микробиологического объекта // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2012. № 3/4 (57). С. 4-7.
4. Pyatkov S.G. Certain inverse problems for parabolic equations // Fundamental and applied mathematics. 2006. Vol. 12, No. 4. P. 187-202.
5. Shangina O.R., Gaynutdinova R.D. Interaction of laser radiation with biological tissues // Practical medicine. 2019. Vol. 17, No. 1. P. 24-27.
6. Barseghyan V.R. Optimal Boundary Control of a Distributed Heterogeneous Vibrating System with Given States at Intermediate Times // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2022. Vol. 62. P. 2023–2032.
7. Барсегян В.Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2022. № 2. С. 41-54.
8. Barseghyan V., Solodusha S. On the Optimal Control Problem for Vibrations of the Rod/String Consisting of Two Non-Homogeneous Sections with the Condition at an Intermediate Time // Mathematics. 2022. No. 10(23). P. 4444.
9. Barseghyan V.R. The problem of control of rod heating process with nonseparated conditions at intermediate moments of time // Archives of Control Sciences. 2021. Vol. 31(LXVII), No. 3. P. 481-493.
10. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.