УДК 519.872

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ MMPP/M/K С П-ПОРАЖЕНИЕМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Н.П. Мелошникова
Национальный исследовательский Томский государственный университет
Россия, 634050, Томск, Ленина ул., 36
E-mail: meloshnikovana@gmail.com

Е.А. Фёдорова
Национальный исследовательский Томский государственный университет
Россия, 634050, Томск, Ленина ул., 36
E-mail: moiskate@mail.ru

Ключевые слова: теория массового обслуживания, RQ-система, отрицательные заявки, асимптотический анализ, большая задержка, π-поражение.

Аннотация: В работе проводится исследование многолинейной RQ-системы с вероятностным поражением отрицательными заявками и MMPP входящим потоком как математической модели сетей передачи данных, реализующих протокол множественного случайного доступа. В качестве метода исследования рассмотренной модели предлагается метод асимптотического анализа в условии большой задержки заявок. В работе приводится теорема о виде асимптотической характеристической функции числа заявок на орбите с найденными параметрами аппроксимирующего распределения.

1. Введение

RQ-системы (системы массового обслуживания с повторными вызовами) это новые математические модели ТМО, которые применяются для анализа и оптимизации различных инфо-коммуникационных систем, где присутствуют повторные попытки получить обслуживание через случайное время. Примером таких систем являются сети связи, где реализован протокол множественного случайного доступа, call-центры, центры распределенных вычислений и др. [1, 2]. Отдельным направлением ТМО являются G-системы или G-сети [3, 4], т.е. модели с отрицательными заявками. Такие задачи представляют особый интерес для инфокоммуникационных систем, где характерно наличие негативных воздействий (вирусов, хакерских атак, сбоев и др.). Воздействие отрицательных заявок может быть различно: от уничтожения одного обрабатывающегося запроса до «катастроф» - обнуления всей системы [5]. В работе рассмотрен один из обобщающих случаев – модель с вероятностным поражением для многолинейной RQ-системы с входящим MMPP-потоком.

2. Математическая модель

В работе рассматривается многолинейная RQ-система (рис. 1), на вход которой поступает MMPP-поток заявок (будем называть эти заявки положительными) определяемый диагональной матрицей $\boldsymbol{\Lambda}$ условных интенсивностей λ_n и матрицей $\boldsymbol{Q}$

инфинитезимальных характеристик q_{nv} цепи Маркова $n(t)$, управляющей MMPP-потоком, где $n = 1,\ldots,N$. Стационарное распределение вероятностей состояний $n(t)$ задается вектором $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{rQ} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{re} = 1,$$

где $\mathbf{e}$ $-$единичный вектор размера $1\times N$, $\mathbf{0}$ $-$нулевой вектор, с нулевыми элементами, размером $1\times N$. Положительные заявки поступают в блок обслуживания, состоящего из K приборов (серверов), до момента, пока все сервера не будут заняты. Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ. Если все приборы оказываются заняты, то входящая заявка идет на орбиту, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. После случайной задержки заявка с орбиты вновь обращается к блоку обслуживания, если имеется хотя бы один свободный прибор, она занимает его для обслуживания, иначе мгновенно возвращается на орбиту. С орбиты реализуется протокол множественного случайного доступа, то есть любая заявка может обратиться к обслуживающим приборам после реализации задержки (нет очереди).

Также в систему поступает простейший поток отрицательных заявок с параметром γ. Отрицательная заявка не нуждается в обслуживании, она оказывает негативное воздействие на систему [3]. В работе рассмотрена наиболее общая модель воздействия отрицательных заявок – $\boldsymbol{\pi}$-поражение. При поступлении в систему отрицательная заявка может «обнулить» k приборов с вероятностью π_k, где $k \in 1 \ldots K$. Частными случаями представленной задачи являются RQ-системы с катастрофами в блоке обслуживания [6], RQ-системы с единичным уничтожением обсуживающихся заявок [7].

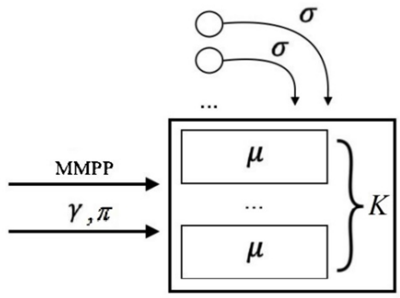

Рис. 1. Многолинейная RQ-система с MMPP-потоком и π-поражением.

Состояние системы в момент времени t определяется трёхмерной цепью Маркова $\{k(t),\ n(t),\ i(t)\}$, где $i(t)$ $-$число заявок на орбите, $n(t)$ $-$цепь Маркова, управляющая MMPP-потоком, $k(t)$ – состояние прибора:

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{все приборы свободны}, \\ 1, \text{если один прибор занят}, \\ \ldots \\ k, \text{если } k \text{ приборов занято}, \\ \ldots \\ K, \text{если все приборы заняты}. \end{cases}$$

Обозначим $P(k, n, i, t) = P\{k(t) = k,\ n(t) = n,\ i(t) = i\}$ - вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k, цепь Маркова в состоянии n и на орбите i заявок. Введем вектор стационарных вероятностей:

$$\mathbf{P}(k,i) = \{P(k,1,i,t), P(k,2,i,t), \ldots, P(k,N,i,t)\}.$$

Запишем систему уравнений Колмогорова в стационарном режиме:

(1)

$$\begin{cases}\mathbf{P}(0,i)(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-i\sigma\mathbf{I})+\mu\mathbf{P}(1,i)+\gamma\sum_{k=1}^{K}\mathbf{P}(k,i)\sum_{v=k}^{K}\pi_v=0,\\ \mathbf{P}(k,i)(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-(i\sigma-k\mu-\gamma)\mathbf{I})+\mathbf{P}(k-1,i)\mathbf{\Lambda}+\sigma(i+1)\mathbf{P}(k-1,n,i+1)+\\ +\mu(k+1)\mathbf{P}(k+1,i)+\gamma\sum_{v=k+1}^{K}\pi_{v-k}\mathbf{P}(v,i)=0, k=\overline{1,K-1}\\ \mathbf{P}(K,i)(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-(K\mu-\gamma)\mathbf{I})+\mathbf{P}(K-1,i)\mathbf{\Lambda}+\mathbf{P}(K,i-1,t)\mathbf{\Lambda}+\\ +\sigma(i+1)\mathbf{P}(K-1,i+1)=0,\end{cases}$$

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Введем частичные характеристические функции:

$$\mathbf{H}_k(u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}\mathbf{P}(k,i).$$

Из системы (1), получаем следующую систему для функций $\mathbf{H}_k(u)$:

(2)
$$\begin{cases}\mathbf{H}_0(u)(\boldsymbol{Q}-\mathbf{\Lambda})+j\sigma\frac{\partial\mathbf{H}_0(u)}{\partial u}+\mu\mathbf{H}_1(u)+\gamma\sum_{k=1}^{K}\mathbf{H}_k(u)\sum_{v=k}^{K}\pi_v=\mathbf{0},\\ \mathbf{H}_k(u)(\boldsymbol{Q}-\mathbf{\Lambda}-(k\mu+\gamma)\mathbf{I})+j\sigma\frac{\partial\mathbf{H}_k(u)}{\partial u}+\mathbf{H}_{k-1}(u)\mathbf{\Lambda}-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}_{k-1}(u)}{\partial u}+\\ +\mu(k+1)\mathbf{H}_{k+1}(u)+\gamma\sum_{v=k+1}^{k}\pi_{v-k}\mathbf{H}_v(u)=\mathbf{0}, k=\overline{1,K-1}\\ \mathbf{H}_K(u)\left(\boldsymbol{Q}-\mathbf{\Lambda}\left(1-e^{ju}\right)-(K\mu-\gamma)\mathbf{I}\right)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}_{K-1}(u)}{\partial u}+\mathbf{H}_{K-1}(u)\mathbf{\Lambda}=\mathbf{0}.\end{cases}$$

Сложим все уравнения системы (2) и получим согласованное уравнение:

(3)
$$\mathbf{H}_K(u)\mathbf{\Lambda}e^{ju}\mathbf{e}+j\sigma\sum_{k=0}^{K-1}\frac{\partial\mathbf{H}_k(u)}{\partial u}\mathbf{e}=0.$$

Решение системы (2), (3) удовлетворяет условию нормировки:

(4)
$$\sum_{k=0}^{K}\mathbf{H}_k(0)=\mathbf{r}.$$

или

$$\sum_{k=0}^{K}\mathbf{H}_k(0)\mathbf{e}=1.$$

Для решения системы (2)-(3) в работе предлагается метод асимптотического анализа в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma\to 0$).

3. Асимптотический анализ в условии большой задержки заявок на орбите

В ходе исследования была доказанна следующая теорема.

Теорема 1. *Асимптотическая характеристическая функция числа заявок* $i(t)$ *на орбите в RQ-системе MMPP|M|N с* π*-поражением* $h(u)=\sum_{n=0}^{N}H(n,v)$ *в условии большой задержки* $\sigma\to 0$ *имеет форму характеристической функции гауссовского распределения*

$$h(u)=\exp\left\{ju\frac{\kappa_1}{\sigma}+\frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma}\right\},$$

где κ_1 *вычисляется по формуле:*

$$\kappa_1=\frac{\mathrm{R}_K\Lambda\mathrm{e}}{(\mathrm{r}-\mathrm{R}_K)\mathrm{e}},$$

κ_2 *вычисляется по формуле:*

$$\kappa_2=\frac{\mathbf{R}_K\mathbf{\Lambda e}+\mathbf{y}_K\mathbf{\Lambda e}+\kappa_1\mathbf{y}_K\mathbf{e}}{1-r_K-\mathbf{g}_K\mathbf{\Lambda e}-\kappa_1\mathbf{g}_K\mathbf{e}},$$

где **e** *−единичный вектор,* **R** *– вектор совместных вероятностей состояний прибора и управляющего процесса MMPP-потоком, определяемый системой:*

$$\begin{cases}\mathbf{R}_0(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda})-\kappa_1\mathbf{R}_0+\mu\mathbf{R}_1+\gamma\sum_{k=1}^{K}\mathbf{R}_k\sum_{v=k}^{K}\pi_v=\mathbf{0},\\ \mathbf{R}_k(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-(k\mu+\gamma)\mathbf{I})-\kappa_1\mathbf{R}_k+\mathbf{R}_{k-1}\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{R}_{k-1}+\mu(k+1)\mathbf{R}_{k+1}+\\ +\gamma\sum_{v=k+1}^{k}\pi_{v-k}\mathbf{R}_v=\mathbf{0},k=\overline{1,K-1}\\ \mathbf{R}_K(\boldsymbol{Q}-(K\mu-\gamma)\mathbf{I})+\kappa_1\mathbf{R}_{K-1}+\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}_{K-1}=\mathbf{0},\end{cases}$$

а вектора $\mathbf{y}_k$ *и* $\mathbf{g}_k$ *определяются следующими системами:*

$$\begin{cases}\mathbf{y}_0(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{I})+\mu\mathbf{y}_1+\gamma\sum_{k=1}^{K}\mathbf{y}_k\sum_{v=k}^{K}\pi_v=\mathbf{0},\\ \mathbf{y}_k(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-(k\mu+\gamma+\kappa_1)\mathbf{I})+\mathbf{y}_{k-1}\boldsymbol{\Lambda}-\kappa_1\mathbf{R}_{k-1}+\kappa_1\mathbf{y}_{k-1}+\mu(k+1)\mathbf{y}_{k+1}+\\ +\gamma\sum_{v=k+1}^{k}\pi_{v-k}\mathbf{y}_v=\mathbf{0},k=\overline{1,K-1}\\ \mathbf{R}_K\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{y}_K(\boldsymbol{Q}-(K\mu-\gamma)\mathbf{I})+\mathbf{y}_{K-1}(\kappa_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda})=\mathbf{0},\\ \sum_{k=0}^{K}\mathbf{y}_k\mathbf{e}=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{g}_0(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda})-\mathbf{R}_0+\mu\mathbf{g}_1+\gamma\sum_{k=1}^{K}\mathbf{g}_k\sum_{v=k}^{K}\pi_v=\mathbf{0},\\ \mathbf{g}_k(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\Lambda}-(k\mu+\gamma+\kappa_1)\mathbf{I})-\mathbf{R}_k+\mathbf{g}_{k-1}\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{g}_{k-1}+\mathbf{R}_{k-1}+\mu(k+1)\mathbf{g}_{k+1}+\\ +\gamma\sum_{v=k+1}^{k}\pi_{v-k}\mathbf{g}_v=\mathbf{0},k=\overline{1,K-1}\\ \mathbf{g}_K(\boldsymbol{Q}-(K\mu-\gamma)\mathbf{I})+\mathbf{R}_{K-1}+\mathbf{g}_{K-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\kappa_1\mathbf{I})=\mathbf{0},\\ \sum_{k=0}^{K}\mathbf{g}_k\mathbf{e}=0.\end{cases}$$

Используя теорему 1, можно построить асимптотическое распределение (нормальное распределение с математическим ожиданием $\frac{\kappa_1}{\sigma}$ и дисперсией $\frac{\kappa_2}{\sigma}$), которое будет аппроксимировать искомые вероятности $P(i)$, точность которого будет расти с уменьшением параметра задержки σ.

4. Заключение

В ходе исследования был проведен асимптотический анализ многолинейной RQ-системы с MMPP-потоком и -поражением в условии большой задержки как математической модели сетей передачи данных, функционирующих по протоколу случайного множественного доступа. Приведена теорема о том, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид Гаусовского распределения с полученными параметрами. С помощью найденного распределения можно получить все основные характеристики технической системы, а также промоделировать ее функционирование при различных параметрах, что позволит выбрать оптимальные параметры управления сети.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00454, https://rscf.ru/project/24-21-00454/.

Список литературы

1. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues // London: Chapman and Hall. 1997. Vol. 7, No. 1. P. 127-167.
2. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems. Berlin: Springer, 2008. 267 p.
3. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. 1991. No. 28. P. 656-663.
4. Do T.V. Bibliography on G-networks, negative customers and applications // Mathematical and Computer Modelling. 2011. Vol. 53. No. 1-2. P. 205-212.
5. Shin Y. W. Multi-server retrial queue with negative customers and disasters. // Queueing Systems. 2007. Vol. 55, No. 4. P. 223-337.

6. Meloshnikova N. P., Fedorova E. A., Plaksin D. A. Asymptotic Analysis of a Multiserver Retrial Queue with Disasters in the Service Block // Queueing Theory and Applications. ITMM 2022. Communications in Computer and Information Science. Cham: Springer, 2023. P. 55-67.
7. Мелошникова Н. П. Численный анализ RQ-системы M|M|N с отрицательными заявками // Воронеж: Сборник трудов Международной научной конференции: Математическое и компьютерное моделирование, вычислительный эксперимент 2021. 2022. С. 634-638.