Теперь используем доказанное включение (2). Пусть $(x, r) \in X \times (0, +\infty)$ – любая пара, для которой включение справедливо. Тогда получаем двойное включение

$$\Phi(B^X(x, r)) \subset B^Y(\Psi(x), r) \subset \Psi(B^X(x, r)), \tag{4}$$

поскольку второе включение в (4) выполнено всегда по определению 1-накрывающего отображения. В силу этого включения, существуют точки $a, b \in B^X(x, r) : \Psi(a) = \Psi(x) - r$, $\Psi(b) = \Psi(x) + r$. Числа $\Psi(x) - r$ и $\Psi(x) + r$ являются соответственно инфимумом и супремумом множества $B^Y(\Psi(x), r)$. И в силу первого включения в (4) получается $\Phi(a) \geqslant \Psi(x) - r = \Psi(a)$, $\Phi(b) \leqslant \Psi(x) + r = \Psi(b)$.

Рассмотрим в пространстве X множество точек $\{x(t) = a + (b - a)t \mid t \in [0, 1]\}$ и отображение $H : [0, 1] \to \mathbb{R}$, определенное по правилу $H(t) = \Phi(x(t)) - \Psi(x(t))$. Оно непрерывно и обладает свойствами $H(0) = \Phi(a) - \Psi(a) \geqslant 0$, $H(1) = \Phi(b) - \Psi(b) \leqslant 0$. По теореме о промежуточном значении непрерывной функции, существует точка $t_0 \in [0, 1]$, для которой $H(t_0) = 0$, и значит, точка $x(t_0) \in X$ является точкой совпадения отображений Φ и Ψ.

Автор благодарен своему руководителю А.В. Арутюнову, а также С.Е. Жуковскому и К.А. Царькову, за ценные обсуждения.

Список литературы

1. Browder F.E. On the Convergence of Successive Approximations for Nonlinear Functional Equations // Indagationes Mathematicae (Proceedings). 1968. Vol. 71. P. 27–35.
2. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
3. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1561-1570.
4. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1977. 260 с.
5. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А. Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 3. С. 3–22.