УДК 515.126.4

ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

О.А. Васянин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: o.vasyanin@gmail.com

Ключевые слова: накрывающее отображение, точка совпадения, задачи управления, равновесная цена.

Аннотация: Рассматривается задача существования точек совпадения двух непрерывных функций, определенных на конечномерном пространстве. Показано, что если одна функция является накрывающей, а вторая удовлетворяет усиленному условию Липшица с константой, равной константе накрывания, то эти функции имеют точку совпадения. Обсуждается взаимосвязь полученного результата с задачами управления и математической экономикой.

1. Введение

Пусть $X = (X, \rho)$ – полное метрическое пространство, заданы отображение $\Phi : X \to X$ и функция $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, обладающая следующими свойствами: $\gamma(\cdot)$ непрерывна, монотонно неубывает, $\gamma(0) = 0$ и $0 \leqslant \gamma(t) < t$ для любого $t > 0$. В [1] доказано следующее утверждение: если Φ является обобщенно-сжимающим, т. е.

$$\rho(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leqslant \gamma(\rho(x_1, x_2)) \quad \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X,$$

то у Φ существует единственная неподвижная точка, т. е. точка $\xi \in X : \Phi(\xi) = \xi$. Это утверждение обобщает известный принцип сжимающих отображений Банаха.

Более общим понятием, чем неподвижная точка, является точка совпадения. Пусть заданы метрические пространства $X = (X, \rho_X)$, $Y = (Y, \rho_Y)$ и отображения $\Phi : X \to Y$, $\Psi : X \to Y$. *Точкой совпадения* отображений Φ и Ψ называется точка $\xi \in X$ такая, что $\Phi(\xi) = \Psi(\xi)$.

Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *α-накрывающим*, если число $\alpha > 0$ и выполнено включение

$$\Psi(B^X(x, r)) \supset B^Y(\Psi(x), \alpha r) \quad \forall x \in X, \forall r \geqslant 0.$$

В [2] доказано, что если X, Y – полные метрические пространства, отображение $\Phi : X \to Y$ является β-липшицевым, отображение $\Psi : X \to Y$ является непрерывным и α-накрывающим и $\alpha > \beta$, то существует точка совпадения Φ и Ψ.

В связи с приведенными утверждениями представляется интересным следующий вопрос. Пусть для отображения Φ выполняется

$$(1) \qquad \rho_Y(\Phi(x_1),\, \Phi(x_2)) \leqslant \gamma(\rho_X(x_1,\, x_2)) \quad \forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$$

и отображение $\Psi : X \to Y$ является непрерывным и 1-накрывающим. Верно ли, что эти отображения имеют точку совпадения? Отметим, что отображение Φ, удовлетворяющее (1), является, вообще говоря, всего лишь 1-липшицевым. Потому результат из [2] здесь не применим.

В настоящей работе ответ на этот вопрос приводится в следующем частном случае: $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$.

2. Значимость точек совпадения для приложений

Задачи о неподвижных точках и точках совпадения важны для приложений. Теоремы о неподвижных точках и точках совпадения являются важным инструментом исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, задач управления (см., например, [3]) и задач оптимального управления (см., например, [4, гл. IV]). В [5] приводится интерпретация точки совпадения отображений специального вида (отображений спроса и предложения) как вектора равновесных цен в модели рынка. Наличие точки совпадения в этой модели означает наступление экономического равновесия на рынке.

3. Основные результаты

3.1. Случай отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть пространства $X = Y = \mathbb{R}$. Пусть отображение $\Phi : X \to Y$ является таким, что для него выполнено (1), а отображение $\Psi : X \to Y$ является непрерывным 1-накрывающим. Тогда существует точка совпадения отображений Φ и Ψ.*

Перед доказательством сформулируем утверждения, непосредственно вытекающие из определения накрывания.

Лемма 1. *Пусть есть отображение $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем Ψ непрерывно и является 1-накрывающим. Тогда Ψ не может иметь локальный экстремум ни в какой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Следствие 1. *Непрерывное 1-накрывающее отображение $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отлично от константы на любом отрезке $[a,\, b]$.*

Лемма 2. *Пусть есть отображение $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем Ψ непрерывно и является 1-накрывающим. Тогда для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ верно, что x_0 является точкой максимума или точкой минимума отображения Ψ на луче $(-\infty,\, x_0]$. То же самое верно и для луча $[x_0,\, +\infty)$, т. е. x_0 является точкой максимума или точкой минимума отображения Ψ на луче $[x_0,\, +\infty)$.*

Следствие 2. *Непрерывное 1-накрывающее отображение $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обязательно строго монотонно, т. е. монотонно возрастает или монотонно убывает, и коэрцитивно, что означает следующее: $\Psi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.*

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся следствием 2. Предположим, что Ψ строго возрастает на прямой $\mathbb{R}$. В силу 1-накрывания Ψ, для любых чисел $x \in \mathbb{R}$ и $r \geqslant 0$ выполнено включение $[\Psi(x-r),\, \Psi(x+r)] = \Psi(B^X(x,\, r)) \supset B^Y(\Psi(x),\, r) = [\Psi(x)-r,\, \Psi(x)+r]$, откуда следует, что для любых точек $x \leqslant y$ выполнено неравенство $|\Psi(y)-\Psi(x)| \geqslant y-x$. Аналогично, если Ψ строго убывает на прямой $\mathbb{R}$, то для любых точек $x \leqslant y$ выполнено то же неравенство $|\Psi(y)-\Psi(x)| \geqslant y-x$.

Рассмотрим отображение $H = \Psi - \Phi$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для всяких $x_1 \in \mathbb{R}$ и $x_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $x_1 \leqslant x_2$, выполнено следующее:

$$|H(x_2) - H(x_1)| = |(\Psi(x_2) - \Psi(x_1)) - (\Phi(x_2) - \Phi(x_1))| \overset{\Delta}{\geqslant} |\Psi(x_2)-$$
$$-\Psi(x_1)| - |\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| \geqslant |\Psi(x_2) - \Psi(x_1)| - \gamma(x_2 - x_1) \geqslant x_2-$$
$$-x_1 - \gamma(x_2 - x_1) \equiv \delta(x_2 - x_1),$$

где $\delta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – непрерывная функция со свойствами $\delta(0) = 0$, $0 < \delta(t) \leqslant t$ при $t > 0$. Здесь мы пользовались неравенством треугольника для модуля в $\mathbb{R}$, которое обозначили символом «Δ» над знаком неравенства.

Отображение H можно без потери общности считать монотонно возрастающим (если Ψ монотонно убывает, то перейдем к возрастающему отображению $-H = \Phi - \Psi$). Следовательно, для любых $x_1 < x_2$ выполнено $H(x_2) - H(x_1) \geqslant \delta(x_2 - x_1) > 0$. Предположим, что $H(\eta) \neq 0\ \forall \eta \in \mathbb{R}$. Поскольку H нигде не обнуляется и непрерывно как разность непрерывных отображений Φ и Ψ, то знакопостоянно.

Предположим, что $H(\eta) < 0\ \forall \eta \in \mathbb{R}$. В силу монотонного роста H и его ограниченности сверху, имеем $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} H(x) = \overline{h} \leqslant 0$. Перейдем для некоторого $t_1 > 0$ в неравенстве $H(x + t_1) - H(x) \geqslant \delta(t_1)$, верном при любом $x \in \mathbb{R}$, к пределу при $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(H(x + t_1) - H(x)) = \overline{h} - \overline{h} = 0 \geqslant \delta(t_1)$. Но функция $\delta(t_1) > 0$. Получили противоречие.

Теперь предположим, что $H(\eta) > 0\ \forall \eta \in \mathbb{R}$. В силу монотонного роста H и его ограниченности снизу, имеем $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} H(x) = \underline{h} \geqslant 0$. Предельный переход для некоторого $t_1 > 0$ в том же неравенстве $H(x + t_1) - H(x) \geqslant \delta(t_1)$ при $x \to -\infty$ приводит к тому же противоречию: $0 < \delta(t_1) \leqslant 0$.

Значит, предположение $H(\eta) \neq 0\ \forall \eta \in \mathbb{R}$ неверно, и существует точка $\eta \in \mathbb{R}$ такая, что $H(\eta) = 0$, что означает равенство $\Phi(\eta) = \Psi(\eta)$.

3.2. Случай отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$

Сформулируем и докажем основной результат этого раздела.

Теорема 2. *Пусть пространства* $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$. *Пусть отображение* $\Phi : X \to Y$ *является таким, что для него выполнено* (1), *а отображение* $\Psi : X \to Y$ *является непрерывным 1-накрывающим. Тогда существует точка совпадения отображений* Φ *и* Ψ.

Доказательство теоремы 2. Покажем сначала, что для любого числа $r > 0$ существует точка $x \in X$ такая, что справедливо включение

$$\Phi(B^X(x,\, r)) \subset B^Y(\Psi(x),\, r). \qquad (2)$$

Заметим, что для любых $x \in X$ и любых $r > 0$ выполнено включение $\Phi(B^X(x, r)) \subset B^Y(\Phi(x), \gamma(r))$. Действительно, для любой точки $y \in B^X(x, r)$ верно $\rho_Y(\Phi(y), \Phi(x)) \leqslant \gamma(\rho_X(y, x)) \leqslant \gamma(r)$ в силу двойного неравенства $0 \leqslant \rho_X(y, x) \leqslant r$ и монотонного неубывания $\gamma(\cdot)$. Это доказывает написанное включение.

Выберем точку $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность точек $\{x_n\} \subset X$ при $n \geqslant 1$ со свойством $\Psi(x_n) = \Phi(x_{n-1})$ при $n \geqslant 1$, т. е. такую, как описано в работе [2]. Покажем, что такая последовательность существует, и при этом выполнены оценки $\rho_X(x_n, x_{n-1}) \leqslant \gamma(\rho_X(x_{n-1}, x_{n-2}))$ при $n \geqslant 2$ и $\rho_X(x_1, x_0) \leqslant \gamma(\rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0)))$. Действительно, пусть элементы последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ уже построены. В силу 1-накрывания Ψ, при $n \geqslant 1$ справедливо включение

$$\Psi(B^X(x_{n-1}, \rho_Y(\Psi(x_{n-1}), \Phi(x_{n-1})))) \supset B^Y(\Psi(x_{n-1}), \rho_Y(\Psi(x_{n-1}), \Phi(x_{n-1})))$$

и видно, что

$$B^Y(\Psi(x_{n-1}), \rho_Y(\Psi(x_{n-1}), \Phi(x_{n-1}))) \ni \Phi(x_{n-1}).$$

Значит, существует точка $x_n \in B^X(x_{n-1}, \rho_Y(\Psi(x_{n-1}), \Phi(x_{n-1})))$, для которой $\Psi(x_n) = \Phi(x_{n-1})$. Точку x_n (любую из подходящих точек, если их оказалось более одной) выберем в качестве следующего элемента нашей последовательности. Отсюда при $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned}\rho_X(x_n, x_{n-1}) \leqslant \rho_Y(\Psi(x_{n-1}), \Phi(x_{n-1})) = \rho_Y(\Phi(x_{n-2}), \Phi(x_{n-1})) \leqslant \\ \leqslant \gamma(\rho_X(x_{n-1}, x_{n-2})),\end{aligned}$$

а также $\rho_X(x_1, x_0) \leqslant \gamma(\rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0)))$. Обозначим $\rho_n := \rho_X(x_n, x_{n-1})$ при $n \geqslant 1$ и $\rho_0 := \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0))$. Тогда при $n \geqslant 1$ верно, что

$$\rho_n \leqslant \gamma(\rho_{n-1}) \leqslant \rho_{n-1}. \tag{3}$$

Монотонная и ограниченная числовая последовательность $\{\rho_n\}$ по теореме Вейерштрасса имеет предел

$$\overline{\rho} = \lim_{n\to+\infty} \rho_n \geqslant 0.$$

Перейдем к пределу в первом неравенстве в (3) при $n \to \infty$, пользуясь непрерывностью функции $\gamma(\cdot)$. Получим $\overline{\rho} \leqslant \gamma(\overline{\rho})$, откуда $\overline{\rho} = 0$.

Теперь выберем число $r > 0$. В силу сходимости $\rho_n \to 0$, существует число $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых номеров $n \geqslant N$ выполнено неравенство $\rho_n \leqslant r - \gamma(r)$. Для этих номеров $n \geqslant N$ получим $\Phi(B^X(x_n, r)) \subset B^Y(\Psi(x_n), r)$. Действительно, как показано выше, $\Phi(B^X(x_n, r)) \subset B^Y(\Phi(x_n), \gamma(r))$. Включение $\Phi(B^X(x_n, r)) \subset B^Y(\Psi(x_n), r)$ следует из того, что для любого $y \in B^X(x_n, r)$ верно

$$\begin{aligned}\rho_Y(\Phi(y), \Psi(x_n)) \overset{\Delta}{\leqslant} \rho_Y(\Phi(y), \Phi(x_n)) + \rho_Y(\Psi(x_n), \Phi(x_n)) = \\ = \rho_Y(\Phi(y), \Phi(x_n)) + \rho_Y(\Phi(x_{n-1}), \Phi(x_n)) \leqslant \rho_Y(\Phi(y), \Phi(x_n)) + \rho_n \leqslant \\ \leqslant \rho_Y(\Phi(y), \Phi(x_n)) + (r - \gamma(r)) \leqslant \gamma(r) + (r - \gamma(r)) = r.\end{aligned}$$

Здесь мы пользовались неравенством треугольника для метрики ρ_Y, которое обозначили символом «Δ» над знаком неравенства.

Теперь используем доказанное включение (2). Пусть $(x, r) \in X \times (0, +\infty)$ – любая пара, для которой включение справедливо. Тогда получаем двойное включение

$$\Phi(B^X(x, r)) \subset B^Y(\Psi(x), r) \subset \Psi(B^X(x, r)), \tag{4}$$

поскольку второе включение в (4) выполнено всегда по определению 1-накрывающего отображения. В силу этого включения, существуют точки $a, b \in B^X(x, r) : \Psi(a) = \Psi(x) - r, \Psi(b) = \Psi(x) + r$. Числа $\Psi(x) - r$ и $\Psi(x) + r$ являются соответственно инфимумом и супремумом множества $B^Y(\Psi(x), r)$. И в силу первого включения в (4) получается $\Phi(a) \geqslant \Psi(x) - r = \Psi(a),\ \Phi(b) \leqslant \Psi(x) + r = \Psi(b)$.

Рассмотрим в пространстве X множество точек $\{x(t) = a + (b - a)t \,|\, t \in [0, 1]\}$ и отображение $H : [0, 1] \to \mathbb{R}$, определенное по правилу $H(t) = \Phi(x(t)) - \Psi(x(t))$. Оно непрерывно и обладает свойствами $H(0) = \Phi(a) - \Psi(a) \geqslant 0$, $H(1) = \Phi(b) - \Psi(b) \leqslant 0$. По теореме о промежуточном значении непрерывной функции, существует точка $t_0 \in [0, 1]$, для которой $H(t_0) = 0$, и значит, точка $x(t_0) \in X$ является точкой совпадения отображений Φ и Ψ.

Автор благодарен своему руководителю А.В. Арутюнову, а также С.Е. Жуковскому и К.А. Царькову, за ценные обсуждения.

Список литературы

1. Browder F.E. On the Convergence of Successive Approximations for Nonlinear Functional Equations // Indagationes Mathematicae (Proceedings). 1968. Vol. 71. P. 27–35.
2. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
3. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1561-1570.
4. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1977. 260 с.
5. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А. Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 3. С. 3–22.