519.872

БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНАЯ СМО С ПОТОКОМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК

Д.А. Королев
Национальный исследовательский Томский государственный университет
Россия, 634050, Томск, просп. Ленина, 36
E-mail: danilkorolev9999@gmail.com

С.П. Моисеева
Национальный исследовательский Томский государственный университет
Россия, 634050, Томск, просп. Ленина, 36
E-mail: smoiseeva@mail.ru

Ключевые слова: СМО, система массового обслуживания, потоки отрицательных заявок, метод производящей функции.

Аннотация: В работе рассматривается математическая модель бесконечнолинейной системы массового обслуживания с входящим пуассоновским потоком положительных заявок и с входящим пуассоновским потоком отрицательных заявок. Получен вид производящей функции, характеристической функции, а также найдено распределение вероятностей числа положительных (незараженных) заявок в системе.

1. Введение

Системы и сети с отрицательными заявками были введены Е. Геленбе [1] и отличались от классических тем, что помимо обычных потоков заявок в систему поступали дополнительные потоки отрицательных заявок, которые при поступлении уничтожают одну положительную, если такая имеется. Изначально такие сети применялись для моделирования биофизических нейронных сетей. В настоящее время применение таких систем достаточно широкое от практических задач в телекоммуникациях [1-3], до социально-экономических постановок [4]. В данной работе рассматривается бесконечнолинейная система массового обслуживания (СМО) с отрицательными заявками. Данная модель впервые предложена А. А. Натаном [5] и в дальнейшем модифицирована в работах [6, 7]. В настоящей работе предлагается модель бесконечнолинейной СМО с пуассоновскими потоками отрицательных и положительных заявок. Для исследования применяется метод производящих функций.

2. Математическая модель с отрицательными заявками

Рассматривается СМО с двумя входящими потоками, первый поток с положительными заявками с параметром λ, второй поток с отрицательными заявками с параметром α. Пришедшая положительная заявка занимает один из свободных приборов и начинает своё обслуживание в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром μ_1. Пришедшая отрицательная заявка начинает уничтожение положительной заявки, которая обслуживается на приборе, в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром μ_2. В системе может находиться только одна отрицательная заявка. Если отрицательная заявка успевает уничтожить все положительные заявки, то она покидает систему. Если изначально система пуста, то пришедшая отрицательная заявка мгновенно покидает систему. Обозначим $i(t)$ – число положительных заявок в момент времени t. Ставится задача исследования числа положительных (незараженных) заявок в системе.

Введем случайный процесс

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{есливсистеменетотрицательнойзаявки} \\ 1, \text{есливсистемеестьотрицательнаязаявка} \end{cases}$$

Тогда случайный процесс$\{i(t),\ k(t)\}$ является двумерной цепью Маркова. Для его распределения вероятностей

$$P\{i(t) = i, k(t) = k\} = P_k(i,t),\ k = 0{,}1$$

составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова в стационарном режиме:

$$\begin{cases} -\Pi_0(0)\lambda + \Pi_1(0)\mu_2 + \Pi_0(1)\mu_1 = 0 \\ \dots \\ -\Pi_0(i)(\lambda + i\mu_1 + \alpha) + \Pi_0(i-1)\lambda + \Pi_0(i+1)(i+1)\mu_1 = 0 \\ -\Pi_1(0)(\lambda + \mu_2) + \Pi_0(1)\alpha + \Pi_1(1)\mu_1 + \Pi_1(2)\mu_2 = 0 \\ \dots \\ -\Pi_1(i)(\lambda + i\mu_1 + \mu_2) + \Pi_0(i+1)\alpha + \Pi_1(i+1)(i+1)\mu_1 + \\ +\Pi_1(i-1)\lambda + \Pi_1(i+1)\mu_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\Pi_0(i), \Pi_1(i), i = \overline{0,\infty}$ – стационарные вероятности случайного процесса$\{i(t),\ k(t)\}$.

3. Производящие функции

Введём частичные производящие функции

$$G(0,x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \Pi_0(i)$$

$$G(1,x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \Pi_1(i).$$

Методом производящих функций преобразуем систему (1):

$$\begin{cases} \alpha\Pi_0(0) + (\lambda(x-1) - \alpha)G(0,x) + \mu_1(1-x)\frac{\partial G(0,x)}{\partial x} + \mu_2\Pi_1(0) = 0 \\ -\lambda G(1,x) - \mu_1 x\frac{\partial G(1,x)}{\partial x} - \mu_2 G(1,x) + \lambda x G(1,x) + \mu_1\frac{\partial G(1,x)}{\partial x} + \\ +\frac{\mu_2}{x}(G(1,x) - \Pi_1(0)) + \frac{\alpha}{x}(G(0,x) - \Pi_0(0)) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Введём следующие замены:

$$\alpha\Pi_0(0) + \mu_2\Pi_1(0) = \mu_1\Pi$$
$$G(k,x) = \Pi \cdot g(k,x).$$

Тогда система (2) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial g(0,x)}{\partial x} = g(0,x)\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_1} - \frac{\alpha}{\mu_1(x-1)}\right) + \frac{1}{x-1} \\ \frac{\partial g(1,x)}{\partial x} = \frac{1}{\mu_1(1-x)}\left[g(1,x)\cdot\left(\lambda(1-x) + \mu_2 - \frac{\mu_2}{x}\right) - g(0,x)\cdot\frac{\alpha}{x} + \frac{\mu_1}{x}\right] \end{cases}. \tag{3}$$

Найдём $g(0,x)$ из первого уравнения системы (3):

$$g(0,x) = \left[-\int_0^x e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}y}\cdot(1-y)^{\frac{\alpha}{\mu_1}-1}dy + C\right]\cdot e^{\frac{\lambda}{\mu_1}x}(1-x)^{-\frac{\alpha}{\mu_1}}. \tag{4}$$

Найдём $g(1,x)$ из первого уравнения системы (3):

$$g(1,x) = \left[-\int_x^1 e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}y}\,b(y)dy + C\right]\cdot e^{\frac{\lambda}{\mu_1}x}\cdot x^{-\frac{\mu_2}{\mu_1}}, \tag{5}$$

где

$$b(x) = g(0,x)\cdot\frac{\alpha}{\mu_1 x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)}.$$

В уравнении (4) устремим $x \to 1$. Тогда:

$$C = \int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}y} \cdot (1-y)^{\frac{\alpha}{\mu_1}-1} dy.$$

Тогда полное решение $g(0,x)$ будет иметь вид:

$$g(0,x) = \left[\int_x^1 e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}y} \cdot (1-y)^{\frac{\alpha}{\mu_1}-1} dy\right] \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu_1}x} \cdot (1-x)^{-\frac{\alpha}{\mu_1}}. \tag{6}$$

В уравнении (5) устремим $x \to 0$. Тогда:

$$C = \int_x^1 e^{\frac{\lambda}{\mu_1}(1-y)} y^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} b(y) dy.$$

Тогда полное решение $g(1,x)$ будет иметь вид:

$$g(1,x) = \left[\int_0^x e^{\frac{\lambda}{\mu_1}(1-y)} \cdot y^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} b(y) dy\right] \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}(1-x)} \cdot x^{-\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \tag{7}$$

Находим значение П из условия нормировки:

$$\Pi = [g(0{,}1) + g(1{,}1)]^{-1} = \left[\int_0^1 e^{\frac{\lambda}{\mu_1}(1-y)} y^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} b(y) dy\right]^{-1}, \tag{8}$$

где

$$b(x) = g(0,x) \cdot \frac{\alpha}{\mu_1 x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)}.$$

Окончательный вид производящей функции:

$$G(x) = \left[\int_0^1 e^{\frac{\lambda}{\mu_1}(1-y)} y^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} b(y) dy\right]^{-1} \cdot [g(0,x) + g(1,x)], \tag{9}$$

где:

$$g(0,x) = \left[\int_x^1 e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}y} \cdot (1-y)^{\frac{\alpha}{\mu_1}-1} dy\right] \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu_1}x} (1-x)^{-\frac{\alpha}{\mu_1}},$$

$$g(1,x) = \left[\int_0^x e^{\frac{\lambda}{\mu_1}(1-y)} y^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} b(y) dy\right] \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}(1-x)} \cdot x^{-\frac{\mu_2}{\mu_1}},$$

$$b(x) = g(0,x) \cdot \frac{\alpha}{\mu_1 x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)}.$$

4. Характеристические функции

В уравнении (6) и (7) выполним замену $x = e^{ju}$, где j – мнимая единица.

$$g(0, e^{ju}) = \left[\int_{e^{ju}}^1 e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}e^{jw}} \cdot (1-e^{jw})^{\frac{\alpha}{\mu_1}-1} dw\right] \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu_1}e^{ju}} (1-e^{ju})^{-\frac{\alpha}{\mu_1}}.$$

Тогда можно записать выражения для частичных характеристических функций:

$$h(0,u) = \left[\int_u^0 e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}e^{jw}} \cdot (1-e^{jw})^{\frac{\alpha}{\mu_1}-1} \cdot j \cdot e^{jw} dw\right] \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu_1}e^{ju}} (1-e^{ju})^{-\frac{\alpha}{\mu_1}}, \tag{10}$$

$$h(1,u) = \left[\int_0^u e^{\frac{\lambda}{\mu_1}(1-e^{jw})} \cdot e^{\frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot jw} \cdot j \cdot b(w) dw\right] \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}(1-e^{ju})} \cdot e^{-\frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot ju}, \tag{11}$$

где

$$b(u) = h(0,u) \cdot \frac{\alpha}{\mu_1(e^{ju}-1)} - \frac{1}{e^{ju}-1}.$$

Учитывая (8), (10) и (11), можно записать окончательный вид характеристической функции:

(12) $$H(u) = \left[\int_0^1 e^{\frac{\lambda}{\mu_1}(1-y)}\, y^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} b(y)dy\right]^{-1} \cdot [h(0,u) + h(1,u)],$$

где:

$$h(0,u) = \left[\int_u^0 e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}e^{jw}} \cdot (1-e^{jw})^{\frac{\alpha}{\mu_1}-1} \cdot j \cdot e^{jw} dw\right] \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu_1}e^{ju}} (1-e^{ju})^{-\frac{\alpha}{\mu_1}},$$

$$h(1,u) = \left[\int_0^u e^{\frac{\lambda}{\mu_1}(1-e^{jw})} \cdot e^{\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot jw} \cdot j \cdot b(w)dw\right] \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}(1-e^{ju})} \cdot e^{-\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot ju},$$

$$b(u) = h(0,u) \cdot \frac{\alpha}{\mu_1(e^{ju}-1)} - \frac{1}{e^{ju}-1}.$$

Используя обратное преобразование Фурье, можно получить распределение вероятностей числа положительных (незаражённых) заявок в системе:

(13) $$P(i) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} \cdot H(u)du.$$

4. Заключение

В работе проведено исследование числа положительных заявок в системе. Проведены численные расчеты, позволяющие найти числовые характеристики исследуемых процессов. В дальнейшем планируется усложнение модели, предполагая, что зараженные заявки становятся «вирусными» и также уничтожают положительные требования.

Список литературы

1. Fourneau J.N., Gelenbe E., Suros R. G-networks with multiple classes of negative and positive customers // Theoret. Comput. Sci. 1996. Vol. 155. P. 141-156.
2. Бочаров П.П., Вишневский В.М. G-сети: развитие теории мультипликативных сетей // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 70-74.
3. Печинкин А.В., Разумчик Р.В., Система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок в дискретном времени // Автоматика и телемеханика. 2009. № 12. С. 109-120.
4. Копать Д.Я., Маталыцкий М.А. Анализ ожидаемого дохода в открытой марковской сети обслуживания с ограниченным числом заявок и случайным временем их ожидания в очередях // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2019. № 6 (117). С. 137-143.
5. Натан А.А. Стохастический модельный анализ простых коммерческих операций. М.: МЗ Пресс, 2005 (Калуж. тип. стандартов). 118 с.
6. Назаров А.А., Феропонтова Н.М. Исследование бесконечнолинейной системы обслуживания с отрицательными заявками и их ожиданием в пустой системе // Известия высших учебных заведений, 2015. № 11/2. 7 с.
7. Назаров А.А., Феропонтова Н.М. Исследование взаимодействия потоков аннигилирующих частиц // Известия высших учебных заведений. 2015. № 8. 8 с.