УДК 519.218.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРИ ЕЕ ОБРАЩЕНИИ В НОЛЬ

Г.А. Зверкина
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: zverkina@ipu.ru

А.А. Кошелев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: koshelev030698@ipu.ru

Ключевые слова: имитационное моделирование, интенсивность, оптимизация, теория восстановления, теория надежности, теория массового обслуживания, численный эксперимент.

Аннотация: Одним из малоизученных, но потенциально имеющим большую область применения, методов имитационного моделирования случайных величин (сл.в.) является метод, в основе которого лежит понятие интенсивности случайной величины. Ранее был изучен метод моделирования сл.в. для положительных интенсивностей. В данной работе рассматривается вопрос о использовании этого метода в случае, когда в некоторых областях интенсивность обращается в ноль.

1. Введение

Имитационное моделирование различных случайных величин в соответствии с некоторым законом распределения – один из основных инструментов для анализа поведения случайных процессов и важно в таких областях, как физика, экономика, финансы, компьютерное моделирование стохастических процессов и пр. В настоящее время известно много различных методов моделирования случайных величин. Самые известные и простые из них – метод обратной функции и метод исключения фон Неймана. Однако, при моделировании поведения некоторой сложной системы в режиме реального времени, параметры которой зависят от некоторых меняющихся со временем факторов и не могут быть известны до начала моделирования, полезно уметь моделировать случайные величины, используя их интенсивности.

2. Основы метода и ранее полученные результаты

Напомним определение интенсивности случайной величины

Определение 1. *Интенсивностью случайной величины ξ с функцией распределения $F(t)$ называется функция*

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}, \tag{1}$$

при этом, как правило, $\int_0^{+\infty} \lambda(t)\mathrm{d}t = \infty$ [2–4]. В теории восстановления по теории надежности и ТМО функция $\lambda(t)$ называется интенсивностью, хотя в теории надежности ее часто называют опасностью отказа [1, 6].

Вообще говоря, интенсивность случайной величины – это предел отношения вероятности почти немедленного окончания длящейся сл.в. ξ на отрезке $(t, t + \Delta t)$ при условии ее неотказа в момент t к Δt при стремлении $\Delta t > 0$ к нулю:

$$\lambda(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{P}\left\{\xi \in (t, t + \Delta t) \mid \xi > t\right\}}{\Delta t}. \tag{2}$$

Из (2) и следует, что величина $\lambda(t)\Delta t$ – вероятность почти немедленного окончания длящейся сл.в. ξ при условии неотказа до момента времени t. Идея предложенного в [3] метода основывается на этом соображении.

Приведем его краткую схему.

Пусть $\{\mathcal{U}_i\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathcal{U}_i \sim U[0; 1)$. Рассмотрим достаточно большой интервал времени от момента $t = 0$ до T. Этот интервал разбивается сеткой $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = T$; длины Δ_i интервалов $(\tau_{i+1} - \tau_i)$ выбираются в зависимости от значения интенсивности в момент τ_i.

В начальный момент времени $t = 0$ начинается период ξ, его интенсивность равна $\lambda(0)$. С вероятностью, близкой к $\lambda(0)\Delta_0$, на интервале $(\tau_1 - \tau_0)$ период ξ заканчивается; можно считать $\xi = \tau_1$. Если этого не произошло, то рассматривается период $(\tau_2 - \tau_1)$, и с вероятностью, близкой к $\lambda(\tau_1)\Delta_1$, $\xi = \tau_2$, и т.д.

Пусть в некоторый момент времени $t = \tau_i < T$ известно, что период ξ еще не закончился. При этом время длительности этого периода равно t, интенсивность в этот момент равна $\lambda(t)$. Тогда изменение этого состояния на интервале времени $(t; t + \Delta t)$ (где $\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{i+1} - \tau_i$) близко к значению $\lambda(t)\Delta t$. Поэтому с вероятностью $\mathbb{P}_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\lambda(t)\Delta t > \mathcal{U}_i\}$ в момент τ_{i+1} закончится рассматриваемый период времени пребывания исследуемого параметра в данном состоянии.

Метод моделирования сл.в. по ее интенсивности ранее не был подробно описан в технической и математической литературе, возможность такого моделирования упоминается в [8]. В работе [3] он был формально описан, обоснован, предложен алгоритм для его программной реализации, представлена сама реализация метода с использованием языка программирования C. На первом этапе, используя эту реализацию, было проведено тестирование метода для сл.в. с постоянной и переменной интенсивностью на равномерной сетке (т.е. расстояние между узлами τ_i постоянно). Было установлено, что качество моделирования существенно зависит от длины интервалов Δ_i, т.е. от выбора шагов моделирования.

В работе [4] алгоритм моделирования был оптимизирован и дополнен алгоритмом автоматического выбора шага моделирования – для положительных интенсивностей. Согласно этому алгоритму, шаг моделирования зависит от значения интенсивности в рассматриваемый в момент времени t и вычисляется по формуле

$$\Delta = \frac{K}{\lambda(t)}, \quad K = 10^{-3} \tag{3}$$

Эта зависимость (3) была получена методами математической статистики с использованием критерия хи-квадрат, подробно описана и обоснована в работе [4]. Однако, алгоритм автоматического выбора шага работает только для сл.в. с интенсивностью $\lambda(t) > 0$. В работе [5] были представлены результаты моделирования с использованием алгоритма автовыбора шага для некоторых сл.в., проведено сравнение такого моделирования с моделированием методом обратной функции, которое показало, что метод генерирует случайные числа с заданным распределением достаточно хорошо, как и метод обратной функции.

3. Вопрос моделирования в случае нулевой интенсивности

Теперь рассмотрим вопрос о возможности моделирования сл.в. по интенсивности, в случае, когда интенсивность на некоторых интервалах или в некоторых точках обращается в ноль. Введем обозначение: $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(s)\mathrm{d}s$. Тогда $\overline{F}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - F(x) = e^{-\Lambda(x)}$. Вероятность окончания длящейся во времени сл.в. ξ на бесконечно малом промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ при условии, что до рассматриваемого момента времени t окончание не произошло, имеет вид (см. [3])

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi \in (t, t + \Delta t) \mid \xi > 0\} &= \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\overline{F(t)}} = \frac{e^{-\Lambda(t)} - e^{-\Lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\Lambda(t)}} = \\ &= 1 - \exp\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \lambda(s)\mathrm{d}s\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда следует, что при интенсивности, достаточно близкой или равной нулю, условная вероятность окончания длящейся сл.в. равна нулю. Однако, при сдвиге по времени на некоторый шаг Δ такой, что при $\lambda(t + \Delta) \neq 0$, вероятность (4) уже не равняется нулю, и мы можем моделировать сл.в., используя алгоритм выбора шага, описанный в предыдущем разделе.

Отсюда предлагается следующее решение задачи моделирования в ситуации, когда интенсивность обращается в ноль. Для простоты изложения здесь мы будем предполагать, что интенсивность равна 0 в начальный момент времени, т.е. $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t) \neq 0$ при $0 < t < T_0$ для некоторого T_0. Фиксируя параметры такой интенсивности, выбираем серию величин $\Delta_k = k\delta$, $k = 1, \ldots, 100$, $\delta = 0,000\,001;\ 0,000\,01;\ 0,000\,1;\ \ldots$.

Моделирование происходит следующим образом: в момент Δ_k интенсивность уже больше нуля, и далее моделирование идет согласно алгоритму с использованием алгоритма автоматического выбора шага. Так генерируется выборка из 10 000 реализаций моделирования сл.в., которая сравнивается с теоретическим распределением с помощью критерия хи-квадрат. При построении χ^2-статистики выборка разбивалась на 20 интервалов, а уровень значимости $\alpha = 0,01$, т.е. значение χ^2-статистики не превосходит 36,2 (см. [7]).

Задача состоит в выборе оптимального значения величины δ в зависимости от того, с какой скоростью растет значение интенсивности в окрестности 0.

Рассматриваются случаи степено́й скорости роста интенсивности.

4. Результаты

Далее приводятся результаты моделирования случайных величин, интенсивности которых имеют нулевые значения. Как говорилось выше, интенсивности в окрестности 0 имеют вид

$$\lambda(t) = \ell t^n, \quad F(t) = 1 - \exp\left(\frac{\ell t^{n+1}}{n+1}\right), \quad n > 0.$$

Ниже приведены результаты анализа численных экспериментов моделирования при различных значениях n: $n = 1$ интенсивности $\lambda(t) = \ell t$, $n = 2$ – интенсивности $\lambda(t) = \ell t^2$, $n = 3$ – интенсивности $\lambda(t) = \ell t^3$, $n = \frac{1}{2}$ – интенсивности $\lambda(t) = \ell\sqrt{t}$, $n = \frac{1}{3}$ – интенсивности $\lambda(t) = \ell\sqrt[3]{t}$. В качестве результата приводятся интервалы $(\Delta_{left}, \Delta_{right})$ для «отступов» от нуля Δ_k, при которых значение χ^2-статистики не превосходит $36,2$. Предлагается в качестве оптимального значения Δ_k выбирать

Таблица 1. Зависимость интервалов $(\Delta_{left}, \Delta_{right})$ для «отступов» от нуля от параметра ℓ

ℓ	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1/2$	$n = 1/3$
$0,01$	$(0,079;\ 1,08)$	$(0,312;\ 1,142)$	$(0,484;\ 1,282)$	$(7 \cdot 10^{-3};\ 0,997)$	$(8 \cdot 10^{-4};\ 0,902)$
$0,1$	$(0,022;\ 0,378)$	$(0,136;\ 0,52)$	$(0,27;\ 0,702)$	$(10^{-3};\ 0,226)$	$(10^{-4};\ 0,16)$
1	$(0,008;\ 0,085)$	$(0,065;\ 0,253)$	$(0,151;\ 0,418)$	$(3 \cdot 10^{-4};\ 0,052)$	$(2 \cdot 10^{-5};\ 0,034)$
10	$(0,002;\ 0,038)$	$(0,032;\ 0,111)$	$(0,087;\ 0,239)$	$(9 \cdot 10^{-5};\ 0,013)$	$(3 \cdot 10^{-6};\ 0,0064)$
100	$(0,0009;\ 0,013)$	$(0,017;\ 0,063)$	$(0,049;\ 0,137)$	$(10^{-5};\ 0,003)$	$(5 \cdot 10^{-7};\ 0,00104)$

середину вычисленного интервала, т.е., например, для $\lambda(t) = 10^{-2}t$ получаем $\Delta_0 = 0,5795$, а для $\lambda(t) = 10^2 t^2$ имеем $\Delta_0 = 0,04$ и т.д.

Список литературы

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности: Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М.: URSS, 2019, 584 с.
2. Зверкина Г.А. Об экспоненциальной сходимости коэффициента готовности // Управление большими системами. 2021. Вып. 90. С. 5-35.
3. Зверкина Г.А., Кошелев А.А. Об имитационном моделировании случайных величин с помощью интенсивности // Управление большими системами. 2021. Вып. 94. С. 33-49.
4. Зверкина Г.А., Кошелев А.А. О поиске оптимального шага при имитационном моделировании случайной величины с помощью интенсивности // Управление большими системами. 2022. Вып. 100. С. 261-274.
5. Зверкина Г.А., Кошелев А.А. Численное моделирование случайных величин с использованием их интенсивностей // Труды 19-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2023, Воронеж). Воронеж: Воронежский государственный технический университет, 2023. С. 509-516.
6. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967.
7. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. М.: Лаборатория знаний. 2019, 472 с.
8. Ross S.M. Introduction to Probability Models / 9th edition. Burlington: Elsevier, 2007. 801 p.