

УДК 517.977.5

# ПРИМЕНЕНИЕ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ МОДЕЛЕЙ РЫНКА

К.А. Журавлева

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: kseniazhur@gmail.com

**Ключевые слова:** экономическое равновесие, точка совпадения, отображение спроса, отображение предложения, накрывающее отображение.

**Аннотация:** Рассматривается модель «спрос–предложение», в которой отображение спроса и отображение предложения представляют собой отображения, действующие из метрического пространства цен в метрическое пространство товаров. Каждое из этих отображений восстанавливается по соответствующим эластичностям по ценам на товары, которые присутствуют на рынке. С помощью результатов теории накрывающих отображений, а именно используя теоремы о существовании точек совпадения накрывающего и лишнего отображений, действующих в метрических пространствах, получены достаточные условия существования равновесия в исследуемой модели рынка.

## 1. Введение

Условия существования экономического равновесия играют важную роль в исследовании моделей рынка. Положение равновесия подразумевает под собой такое состояние экономической системы, когда ни один из участников рынка не заинтересован в изменении данного положения.

Под предложением будем понимать общий объем произведенной продукции, который регулируется производителем. Под спросом будем понимать общий объем необходимого потребителям товара. Состояние, когда суммарное производство совпадает с суммарным потреблением называется равновесием, а цена, при которой достигается данное состояние экономической системы, называется равновесной.

Доказательство существования состояний равновесия, а также исследование их свойств является важной экономико-математической задачей. Развитие теории накрывающих отображений и существования точек совпадения в метрических пространствах, в частности результаты [1] и [2], позволяют исследовать нелинейные математические модели рынка.

Целью данной работы является получение достаточных условий существования равновесия в модели «спрос–предложение», в которой отображения спроса и предложения восстанавливаются по известным коэффициентам эластичностей.

## 2. Постановка задачи

Пусть дано  $n \in \mathbb{N}$  товаров, причем  $i$ -ый товар имеет цену  $p_i > 0, p_i \in [c_{1i}, c_{2i}], 0 < c_{1i} < c_{2i}, i = \overline{1, n}$ . Рассмотрим множество  $P = [c_{11}, c_{21}] \times [c_{12}, c_{22}] \times \dots \times [c_{1n}, c_{2n}]$ , задающее естественные ограничения на векторы цен. Обозначим  $m \in \mathbb{N}$  – число товаров, для которых ищется положение равновесия.

Пусть также дана матрица  $E = (E_{ij})_{m \times n} (e = (e_{ij})_{m \times n}), E_{ij} \in \mathbb{R} (e_{ij} \in \mathbb{R}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, m \in \mathbb{N}, m \leq n$ , где  $E_{ij}(e_{ij})$  – эластичность спроса (предложения) на товар с номером  $i$  по цене на товар с номером  $j$ .

Предположим, что известны значения спроса  $D^* \in \mathbb{R}_+^m$  при векторе цен  $p^* \in P$ , а также значения предложения  $S^* \in \mathbb{R}_+^m$  при векторе цен  $q^* \in P$ .

Введем отображение спроса:

$$D : P \rightarrow \mathbb{R}_+^m, P \subset \mathbb{R}_+^n.$$

Теперь введем отображение предложения:

$$S : P \rightarrow \mathbb{R}_+^m, P \subset \mathbb{R}_+^n.$$

**Определение 1.** [6] *Коэффициент перекрестной эластичности  $E_{ij}(e_{ij})$  непрерывно дифференцируемого отображения  $D(S)$  по цене  $p$  показывает относительное изменение значения  $i$ -ой координаты отображения при изменении цены  $j$ -ого товара и вычисляется по формуле:*

$$E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{D_i} \left( e_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j} \times \frac{p_j}{S_i} \right), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

## 3. Основной результат

Рассмотрим два метрических пространства  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$ .

**Определение 2.** [3] Пусть  $\beta \geq 0$ . Отображение  $D : X \rightarrow Y$ , будем называть  $\beta$ -липшицевым, если оно удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица  $\beta$ , то есть:

$$\rho_Y(D(p), D(q)) \leq \beta \cdot \rho_X(p, q), \forall p, q \in X.$$

Обозначим  $B^X(A, \varepsilon) = \{x \in X : \rho_X(x, A) \leq \varepsilon\}$  – замкнутая  $\varepsilon$ -окрестность множества  $A$  в метрическом пространстве  $(X, \rho_X)$ .

**Определение 3.** [3] Пусть  $\alpha \geq 0$ . Отображение  $\Phi : X \rightarrow Y$  будем называть  $\alpha$ -накрывающим, если

$$\Phi(B^X(x_0, r)) \supseteq B^Y(\Phi(x_0), \alpha r), \forall r \geq 0, \forall x_0 \in X.$$

**Определение 4.** *Моделью рынка  $\sigma$  называется набор параметров  $\{E, e, D^*, S^*, p^*, q^*, \overline{c_1}, \overline{c_2}\}$ , где:*

- $E$  – матрица эластичности спроса,
- $e$  – матрица эластичности предложения,

- $D(p^*) = D^*$  – известное значение спроса при фиксированном векторе цен  $p^*$ ,
- $S(q^*) = S^*$  – известное значение предложения при фиксированном векторе цен  $q^*$ ,
- $\bar{c}_1$  – вектор нижних значений цен,
- $\bar{c}_2$  – вектор верхних значений цен.

Функции спроса и предложения можно однозначно восстановить по известным данным:

$$D_i(p_1, \dots, p_n) = D_i^* \prod_{j=1}^n \left( \frac{p_j}{p_j^*} \right)^{E_{ij}}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

$$S_i(p_1, \dots, p_n) = S_i^* \prod_{j=1}^n \left( \frac{p_j}{q_j^*} \right)^{e_{ij}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Рассмотрим следующие метрики в заданных множествах:

$$\rho_{\mathbb{R}^m}(D(p), D(q)) = \max_{i=\overline{1, m}} |D_i(p) - D_i(q)|,$$

$$\rho_P(p, q) = \max_{j=\overline{1, n}} |p_j - q_j|.$$

Тогда отображение спроса является  $\beta$ -Липшицевым с константой:

$$\beta(\sigma) = \frac{\max_{i=\overline{1, n}} \left| \alpha_i \frac{\prod_{j=1}^n c_{2j}^{|E_{ij}|} - \prod_{j=1}^n c_{1j}^{|E_{ij}|}}{\prod_{j=1}^{k_{1i}} (c_{1j} c_{2j})^{|E_{ij}|}} \right|}{\max_{k=\overline{1, n}} |c_{2k} - c_{1k}|}.$$

А отображение предложения является  $\alpha$ -накрывающим с константой:

$$\alpha(\sigma) = \left( \max_{\substack{i=\overline{1, n}, \\ k=\overline{1, n}}} \left\{ \left| \frac{\xi_{ik}}{\gamma_k} \right| \left( \frac{\max \{c_{1i}^{1-e_{ki}}, c_{2i}^{1-e_{ki}}\}}{\prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{t_1} c_{1j}^{e_{kj}} \prod_{\substack{j=t_1+1, \\ j \neq i}}^n c_{2j}^{e_{kj}}} - \frac{\min \{c_{1i}^{1-e_{ki}}, c_{2i}^{1-e_{ki}}\}}{\prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{t_1} c_{2j}^{e_{kj}} \prod_{\substack{j=t_1+1, \\ j \neq i}}^n c_{1j}^{e_{kj}}} \right) \right\} \right)^{-1} \cdot \max_{k=\overline{1, n}} |c_{2k} - c_{1k}|.$$

Введем вспомогательную величину:

$$\gamma(\sigma) = \max_{i=\overline{1, n}} |S_i(\tilde{c}) - D_i(\tilde{c})|, \quad \tilde{c} = \frac{\bar{c}_1 + \bar{c}_2}{2}.$$

**Определение 5.** Вектор  $p \in P$  называется **вектором равновесных цен** в модели  $\sigma$ , если  $S(p) = D(p)$ .

**Теорема 1.** Пусть для модели  $\sigma$  справедливы следующие неравенства:

- $\alpha(\sigma) > \beta(\sigma)$ ,
- $\gamma(\sigma) < \alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$ .

Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен  $p^0 \in P = [c_{11}, c_{21}] \times [c_{12}, c_{22}] \times \dots \times [c_{1n}, c_{2n}]$ .

Прежде чем приступить к доказательству данной теоремы, сформулируем вспомогательную теорему.

**Теорема 2.** [3] Пусть даны  $\alpha$  и  $\beta$ , причем  $\alpha > \beta \geq 0$ . Пусть пространство  $X$  полно, отображение  $\Psi$  является  $\alpha$ -накрывающим и замкнуто (т.е. его график замкнут), а отображение  $\Phi$  является  $\beta$ -липшицевым. Тогда для произвольного  $x \in X$  существует такое  $\xi = \xi(x) \in X$ , что

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi), \rho_X(\xi, x) \leq \frac{\rho_Y(\Psi(x), \Phi(x))}{\alpha - \beta}.$$

**Доказательство теоремы 1.**

В силу того, что  $\rho_{\mathbb{R}^m}(D(\tilde{c}), S(\tilde{c})) = \gamma(\sigma) \leq \alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$ , то по теореме 2 существует такой вектор  $p \in P : D(p) = S(p)$  и

$$\rho_P(p, \tilde{c}) \leq \frac{\rho_Y(D(\tilde{c}), S(\tilde{c}))}{\alpha(\sigma) - \beta(\sigma)}.$$

Теорема 1 доказана.

## 4. Заключение

Были получены достаточные условия существования вектора равновесных цен. Полученный результат является уточнением результатов, полученных в [7] и [8]. Для этого были использованы теоремы о точках совпадения накрывающего и липшицевого отображений. Данные результаты могут быть использованы при исследовании мощностей множеств векторов равновесных цен и их численного нахождения.

## Список литературы

1. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. Vol. 5, No. 1. P. 5–16.
2. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
3. Арутюнов А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 184 с.
4. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А. А. Равновесные цены в одной модели экономического равновесия. Математическое моделирование. 2016. Т. 28, № 3. С. 3–22.
5. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 2. С. 225–237.
6. С.Е. Ferguson, J.P. Gould, Microeconomic theory. Homewood, Illinois: Irwin-Dorsey Limited, Georgetown, Ontario, 1975. 556 с.

7. Арутюнов А.В., Котюков А.М., Павлова Н.Г. Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications. 2021. Vol. 24, No. 4. P. 130-144.
8. Котюков А.М., Павлова Н.Г. Equilibrium in Market Models / Proceedings of the 14th International Conference "Management of Large-Scale System Development"(MLSD). IEEE, 2021. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9600139>.