УДК 519.718

МАРКИРОВАННЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В. В. Рыков
РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина "Губкинский университет"
Россия 119991, Москва, Ленинский пр-т, 65.
E-mail: vladimir_rykov@mail.ru

Ключевые слова: Маркированный марковский процесс, система k-из-n, произвольные распределения в.б.р. и восстановления.

Аннотация: В работе вводится понятие маркированного марковского процесса (ММП), которое используется для исследования основных характеристик надёжности системы k-из-n с частичным восстановлением и произвольными распределениями времени безотказной работы (в.б.р.) и восстановления её компонентов.

1. Введение

В теории маркированных точечных процессов (МТП) метки содержат основную информацию о модели и используются для вычисления её выходных показателей. В работе [1] для описания сложных коррелированных потоков информации понятие метки используются для указания типов поступающей информации. В настоящей работе предлагается более общее понятие маркированного марковского процесса (ММП), в котором аналогично МТП метки содержат основную информацию о модели и используются для вычисления её выходных характеристик. Целью работы является демонстрация возможностей методов ММП на примере исследования модели k-из-n с произвольными законами распределения в.б.р. и ремонта её компонентов. В частных случаях эта модель исследовалась разными методами в ряде раюбот (см. [2] – [6]), которые, однако, не позволяли иследовть более общие модели. Такая возможность представилась при использовании методов ММП.

В следующем разделе предложено общее описание ММП, затем в разделе 3. представлено описание частично восстанавливаемой системы k-из-n с произвольными распределениями в.б.р. и восстановления её компонентов. В разделе 4. приводится построение математической модели системы в терминах ММП. В разделе 5. предствлены формулы для вычисления основных характеистик модели, которые реализуются затем с помощью метода имитационного моделирования.

2. ММП

Под ММП понимается процесс с дискретным параметром $t = 0.1, \dots$

$$Z(t) = \{(J(t), \mathbf{X}(t)),\ t = 0.1, \dots\},$$

первая компонента которого представляет собой марковскую цепь $J(t)$ с не более, чем счётным пространством состояний $\mathcal{J}$, а вторая – набор случайных меток $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{X}_j(t) : j \in \mathcal{J}\}$, каждая из которых может представлять собой вектор, компоненты которого принимают значения в измеримых простанствах меток $(E_j, \mathcal{E}_j)$. Такой процесс задаётся:

- переходными вероятностями $p_{ij}(\mathbf{X}_i)$ марковсой цепи J, зависящими от содержания метки $\mathbf{X}_i$ в основном состоянии i на шаге t;
- операторами преобразования меток $\Phi_{ij}(\mathbf{X}_i, \xi)$ при переходе из состояния i в состояне j, зависящими от содержания $\mathbf{X}_i$ метки в состоянии i и некоторой с.в. ξ из последовательности н.о.р. с.в. ξ_t $(t = 1, 2, \dots)$.

Естественно для полного описания такого процесса необходимо задать начальное распределение основной марковской цепи $J(t)$, начальное распределение меток $\mathbf{X}$ и распределение с.в. ξ_t.

Метод ММП позволяет выписывать преобразования меток и получать уравнения для их вероятностно-временных характеристик. Однако вычислительные аспекты решения этих уравнений достаточно сложны. С другой стороны ММП предоставляет отличную возможность использования метода имитационного моделирования, позволяя непосредственно реализовывать его без построения специальных алгоритмов.

3. Описание системы. Постановка задачи

Рассмотрим систему k-из-n с частичным восстанавлением, произвольными распределениями в.б.р. и ремонта её компонентов и несколькими ремонтирующими устройствами, для которой будем использовать обозначение $< GI_{k<n}|GI|l >$ $(l < k)$. Обозначим через

$A_i :$ $(i = 1, 2, \dots)$ в.б.р. компонентов системы, которые предполагаются н.о.р. с.в. и через $A(t) = \mathbf{P}\{A_i \leqslant t\}$ их общую абсолютно непрерывную ф.р. с п.р. $a(t) = A'(t)$ и математическим ожиданием $a = \mathbf{E}[A_i]$.

B_i : $(i = 1, 2, \dots)$ длительности ремонтов компонентов системы, которые предполагаются н.о.р. с.в. с общей для них абсолютно непрерывной ф.р. $B(t) = \mathbf{P}\{B_i \leqslant t\}$, п.р. $b(t) = B'(t)$ и математическим ожиданием $b = \mathbf{E}[B_i]$.

Для демонстрация возможностей методов ММП на примере этой модели обозначим через [1]

$$X^{(1)} \leqslant X^{(2)} \leqslant \dots \leqslant X^{(i)} \leqslant \dots \leqslant X^{(n)}$$

[1]для сохранения единства обозначений для членов вариационного ряда вместо традиционных нижних индексов в скобках мы используем аналогичные верхние индексы.

вариационный ряд для выборки из n н.о.р. с.в. X_i $(i = \overline{1,n})$. Определим операции сдвига $Sh[\mathbf{X}_n]$ и дополнения $Ad[\mathbf{X}_n, X]$ вариационного ряда, которые для его членов опеделяются соотношениями

$$X^{(i)}_{Sh}[\mathbf{X}_n] = X^{(i+1)} - X^{(1)}, \text{ при } i = \overline{1, n-1} \tag{1}$$

$$X^{(i)}_{Ad}[\mathbf{X}_n, X] = \begin{cases} X^{(i)} & \text{для } X^{(i)} \leqslant X, \\ X & \text{для } X^{(i)} < X \leqslant X^{(i+1)}, \\ X^{(i+2)} & \text{для } X > X^{(i+1)}. \end{cases} \tag{2}$$

Продемонтрируем применение методов ММП на модели системы $< GI_{k<n}|GI|l >$ с частичным восстановлением.

4. ММП для системы $< GI_{k<n}|GI|l >$

В качестве ММП для исследования системы $< GI_{k<n}|GI|l >$ выберем последовательность

$$Z(t) = \{(J(t), \mathbf{V}(t)),\ t = 0.1, \dots\}$$

по моментам S_t $(t = 0.1, \dots)$ изменения состояний системы. Здесь $J(t)$ – последовательность состояний системы с множеством состояний $\mathcal{J} = (0, 1, 2, \dots k)$, состояние j означает число компонентов системы, находящихся в состоянии отказа. В качестве меток $\mathbf{V}_j(t) = (\mathbf{X}_j(t), \mathbf{Y}_j(t))$ процесса в состоянии j на шаге t выберем набор остаточных в.б.р. $\mathbf{X}_j(t) = (X_j^{(1)}(t), \dots, X_j^{(n-j)}(t))$ компонентов системы и набор их остаточных длительностей ремонта $\mathbf{Y}_j(t) = (Y_j^{(1)}(t), \dots, Y_j^{(j\wedge l)}(t))$, расположенных в порядке возрастания, где верхний индекс указывает порядковый номер метки, а нижний — номер состояния системы, переменная в скобках – это номер шага.

Заметим, что так как на любом шаге t величина $\mathbf{Y}_0(t) = Y_0^{(0)}(t)$ в состоянии $j(t) = 0$ не определена, её следует доопределить положив $Y_0^{(0)}(t) = \infty$. Если в качестве начального состояния системы на шаге $t = 0$ выбрать состояние, при котором все компоненты системы испрвны, $J(0) = 0$, то метки имеют вид $X_0^{(i)}(0) = A^{(i)}$, $(i = \overline{1,n})$, $Y_0^{(0)}(0) = \infty$, где набор с.в. $A^{(i)}$ представляет собой вариационный ряд для выборки из n н.о.р. с.в. $A_i \in A(\cdot)$. В последующем процесс оказывается в состоянии $j = 0$ с некоторым набором меток, содержание и распределние которых будет вычислено позже.

Переходы основной марковской цепи происходят в соседние состояния и их вероятности вычисляются в зависимости от содержания меток по формулам

$$\begin{aligned} p_j(t) &= \mathbf{P}\{J(t+1) = j+1 \,|\, J(t) = j\} = \mathbf{P}\{X_j^{(1)}(t) \leqslant Y_j^{(1)}(t)\}, \\ q_j(t) &= \mathbf{P}\{J(t+1) = j-1 \,|\, J(t) = j\} = \mathbf{P}\{X_j^{(1)}(t) > Y_j^{(1)}(t)\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через Φ_j и Ψ_j операторы преобразования меток процесса при переходе из состояния j в состояние $j+1$ и в состояние $j-1$ соответственно,

$$\mathbf{V}_{j+1} = \Phi_{j,j+1}[\mathbf{V}_j] \equiv \Phi_j[\mathbf{V}_j], \quad \mathbf{V}_{j-1} = \Phi_{j,j-1}[\mathbf{V}_j] \equiv \Psi_j[\mathbf{V}_j].$$

При переходе "вверх" оператор Φ_j работает как сдвиг для компонены $\mathbf{X}_j$: $\Phi_j[\mathbf{V}_j(t)] = Sh[\mathbf{X}_j(t)]$ и как сдвиг на $X_j^{(1)}(t)$ и пополнение с помощью с.в. B_t для компоненты $\mathbf{Y}_j$: $\Phi_j[\mathbf{V}_j(t)] = Ad[Sh[\mathbf{Y}_j(t), X_j^{(1)}(t)], B_t]$. При переходе "вниз" наоборот Ψ_j работает как сдвиг для компонены $\mathbf{Y}_j$: $\Psi_j[\mathbf{V}_j(t)] = Sh[\mathbf{Y}_j(t)]$ и пополнение с помощью с.в. A_t сдвинутой на величину $Y_j^{(1)}(t)$ для компоненты $\mathbf{X}_j$: $\Phi_j[\mathbf{V}_j(t)] = Ad[Sh[\mathbf{X}_j(t), Y_j^{(1)}(t)], A_t]$.

В этих выражениях величины A_t и B_t являются независимыми от прошлого $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z(s) : s \leqslant t\}$ процесса Z с.в. Полученные выражения показывают, что последовательность меток вычисляется рекуррентно с помощью независимых от прошлого процесса $Z(t)$ с.в., то есть набор меток образует в пространстве меток марковскую цепь специального вида, компоненты которой связаны между собой марковским образом.

На основе полученных преобразований меток вычисляются их переходные вероятности (ядра) и выписываются уравнения для их стационарных и не стационарных распределений. Однако так как их решения и их вычислительные аспекты вызывают мгочисленные трудности предпочтительнее остановиться непосредствено на представлении характеристик модели в терминах меток и их вычислении мтеодом имитационного моедлирования.

В следующем разделе полученные соотношения используем для вычисления основных характеристик модели.

5. Вычисление характеристик надёжности модели

Приведём методы вычисление выходных характеристик модели в терминах её меток. Моменты S_t $(t = 0.1, \dots)$ изменения состояний системы определяются соотношениями

$$S_t = S_{t-1} + T_t(J(t))), \quad t = 0.1, \dots, \quad S_0 = 0,$$

где интервалы T_t между моментами изменения состояний системы для её текущего состояния $J(t)$ определяется соотношением

$$T_t(J(t)) = \min[X_{J(t)}^{(1)}(t), Y_{J(t)}^{(1)}(t)].$$

Время R до первого оказа системы вычисляется с помощью этих интервалов до момента первого посещения состояния k,

$$R = \sum_{t \geqslant 1} T_t(J(t)) 1_{\{J(t)<k\}} = \sum_{t \geqslant 1} \min[X_{J(t)}^{(1)}, Y_{J(t)}^{(1)}] 1_{\{J(t)<k\}}.$$

Стационарные вероятности в случае частичного восстановления согласно закону больших чисел удовлетворяют соотношению

$$\pi_j = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant t \leqslant N} T_t(j).$$

Вычисление этих характеристик и др., связанных с ними, осуществляется методом имитационного моделирования, который непосредственно раелизует роцедуры ММП.

Результаты применения методов имитационного моделирования были апробированы на различных примерах, которые будут представлены в докладе и полной версии статьи

6. Заключение

В работе развивается метод маркирванного марковского процесса, который был апробирован ранее на модели дублированной системы с произвольными распределениями в.б.р. и ремонта её компонентов. В настоящей работе он используется для более сложной системы $< GI_{k<n}|GI|l >$ $(l < k)$ с произвольными количесвами резервирлованных и ремонтных устройств. Предложенный подход позволяет описывать указанную систему с помощью марковского процесса специальной структуры и использовать для её численого анализа метод имитационного оделирования.

Полученные результаты открывают широкие перспективы использования предложенного подхода для исследования сложных стохстических систем. При этом остаются нерешёнными ряд теоретических вопросов, связанных с обоснованием существования стационарных распределений сложных марковских прцессов специального вида.

Список литературы

1. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018, 564 с.
2. Rykov V. On Reliability of a Double Redundant Renewable System. // Springer Nature Switzerland AG 2020. M. Gribaudo et al. (Eds.): ASMTA 2019, LNCS 12023. P. 1-9, 2020. $https://doi.org/10.1007/978-3-030-62885-7\_3$.
3. Rykov V., Efrosinin D., Stepanova N., Sztrik J. On Reliability of a Double Redundant Renewable System with a Generally Distributed Life and Repair Times // Mathematics 2020. Vol. 8. P. 278. doi: 10.3390/math8020278.
4. Rykov V., Ivanova N. Reliability of a Double Redundant System Under the Full Repair Scenario // Data Analysis and Related Applications 1. 2022. Vol. 35, No. 3. P. 191–197.
5. Rykov V., Ivanova N. On reliability function of a k-out-of-n model in case of quick recovery of its components // Материалы 26-й Международной научной конференции "Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: Управление, вычисление, связь"(DCCN-2023, Москва). М.: ИПУ РАН, 2023. С. 269-274.
6. Рыков В.В., Иванова Н.М. О надёжности восстанавливаемой дублированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и восстановления её элементов // Материалы XXII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Томск: Издательство Томского государственного Университета, 2023. Часть 1. С. 335-340.