УДК 517.977.58

МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ СУБОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Д.Н. Ибрагимов
Московский авиационнный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: rikk.dan@gmail.com

К.В. Герасимова
Московский авиационнный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: kristina.gerasimova.2002@gmail.com

А.А. Мохначева
Московский авиационнный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: Arina140803@mail.ru

Ключевые слова: линейная дискретная система, задача быстродействия, полиэдральная аппроксимация, субоптимальное управление.

Аннотация: В работе рассматривается построение субоптимальных по быстродействию процессов для линейной дискретной системы с линейными ограничениями на управление на основе полиэдральной аппроксимации множеств 0-управляемости. Для проведения аппроксимации предлагается использование эвристического алгоритма, нацеленного на уменьшение числа вершин произвольного многогранника при сохранении точности описания в смысле расстояния Хаусдорфа. Проведено сравнение точности и сложности предложенного метода с известным подходом решения задачи быстродействия на основе средств линейного программирования. Решена задача наискорейшей коррекции орбиты спутника по радиусу, радиальной и трансверсальной скоростям.

1. Введение

В работе рассматривается задача быстродействия для линейной стационарной системы с линейными ограничениями на управление. Известно решение данной задачи, основанное на использовании класса множеств 0-управляемости [1]. Известно, что все множества 0-управляемости линейной дискретной системы с линейными ограничениями представляют собой выпуклые многогранники [1], число вершин которых растет экспоненциально в зависимости от временного горизонта [2]. Это позволяет ограничиться при решении задачи быстродействия средствами линейного программирования, но процедура решения данной задачи оптимального управления оказывается фактически нереализуемой стандартными средствами по причине чрезмерного роста сложности.

В связи с этим оказывается актуальной адаптация методов полиэдральной аппроксимации [3] множеств 0-управляемости при сохранении заданного порядка точности. Однако в отличие от классического подхода, нацеленного на построение аппроксимирующего многогранника с наибольшей точностью за минимальное время, в данной работе предлагается минимизировать число вершин результирующего многогранника при фиксированном ограничении на точность аппроксимации, что позволит значительно снизить временные затраты на решение различных задач оптимального управления.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная дискретная система управления $(A,\mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\ &x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ &\mathcal{U} = \operatorname{conv}\{u^1, \dots, u^M\},\quad \operatorname{Ext}\mathcal{U} = \{u^1, \dots, u^M\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – невырожденная матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\mathcal{U}$ – выпуклый многогранник, содержащий 0 в качестве относительно внутренней точки. Через $\operatorname{Ext}\mathcal{U}$ обозначено множество крайних точек или вершин $\mathcal{U}$.

Для системы $(A,\mathcal{U})$ решается задача быстродействия, т.е. требуется вычислить минимальное число шагов $N_{\min}$, за которое можно перевести систему из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат, а также построить процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удолетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, который будем называть оптимальным. Предполагается, что $N_{\min} < \infty$.

Множество состояний, из которых систему $(A,\mathcal{U})$ можно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимого управления называется множеством 0-управляемости за N шагов:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n \colon \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} \colon x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В [1] разработан метод формирования оптимального управления для системы (1), который предполагает предварительное построение множеств 0-управляемости.

Также в случае невырожденной матрицы системы для множеств 0-управляемости известно следующее описание.

Лемма 1 ([1, следствие 1]). *Пусть* $\det A \neq 0$, *класс множеств* $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ *определяется соотношениями* (2). *Тогда для всех* $N \in \mathbb{N}$ *справедливо представление*

$$\mathcal{X}(N) = -\sum_{i=1}^{N} A^{-i}\mathcal{U},\quad \mathcal{X}(N) = A^{-1}\mathcal{X}(N-1) + (-A^{-1}\mathcal{U}).$$

Для построения точного описания Ext $\mathcal{X}(N)$ можно воспользоваться, например, алгоритмом быстрой оболочки. При этом card Ext $\mathcal{X}(N)$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$ в общем случае растет экспоненциально [2, теорема 4.1.2]. По этой причине оказывается актуальной задача построения внутренней полиэдральной аппроксимации $\hat{\mathcal{X}}(N)$ множества $\mathcal{X}(N)$, обладающей наиболее простым описанием при сохранении заданного порядка точности. В качестве критерия точности описания рассматривается расстояние Хаусдорфа:

$$\begin{aligned} &\text{card Ext } \hat{\mathcal{X}}(N) \to \min \\ &\rho_H(\hat{\mathcal{X}}(N), \mathcal{X}(N)) \leqslant \varepsilon, \quad \text{Ext } \hat{\mathcal{X}}(N) \subset \text{Ext } \mathcal{X}(N), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная допустимая погрешность аппроксимации, через $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ обозначено расстояние Хаусдорфа между компаткными множествами $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$.

3. Алгоритм полиэдральной аппроксимации

Рассмотрим эвристический алгоритм, обладающий полиномиальной временной сложностью, который позволяет строить множество $\hat{\mathcal{X}}(N)$ достаточно близкое к оптимальному в смысле задачи (3). Будем полагать, что $0 \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ и верно представление

$$\mathcal{X} = \text{conv } \{x^1, \ldots, x^N\}, \ \text{Ext } \mathcal{X} = \{x^1, \ldots, x^N\}.$$

Введем обозначения для произвольного $\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, N\}$:

$$\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}) = \begin{cases} \text{conv } \{x^i \colon i \in \mathcal{I}\}, & \mathcal{I} \neq \varnothing, \\ \{0\}, & \mathcal{I} = \varnothing, \end{cases} \quad \varepsilon(\mathcal{I}) = \rho_H(\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}), \mathcal{X}).$$

Алгоритм 1. *1. Выбрать $\varepsilon > 0$ и положить $\mathcal{I}_0 = \varnothing$, $k = 0$.*

2. Вычислить $\varepsilon(\mathcal{I}_k)$. Если $\varepsilon(\mathcal{I}_k) \leqslant \varepsilon$, то вернуть $\mathcal{I}_k$, завершив алгоритм.

3. Исходя из расчетов, проведенных в пункте 2, вычислить

$$i_k = \arg \max_{i \in \{1, \ldots, N\} \setminus \mathcal{I}_k} \left(\inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}_k)} \|x - x^i\| \right).$$

4. Положить $\mathcal{I}_{k+1} = \mathcal{I}_k \cup \{i_k\}$, увеличить k на 1 и перейти к шагу 2.

Алгоритм 1 представляет собой модификацию алгоритма уточнения оценок [3, Гл. 4 раздел 4.1]. Применение алгоритма 1 сводится к многократному вычислению расстояния от точки до многогранника, что соответствует решению задачи квадратичного программирования с неотрицательно определенной матрицей квадратичной формы. Такая задача может быть решена с полиномиальной временной сложностью, откуда следует полиномиальный характер алгоритма 1.

Через Approx$(\mathcal{X}, \varepsilon)$ обозначим результат аппроксимации многогранника $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, произведенный с точностью $\varepsilon > 0$ при помощи алгоритма 1. Для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выберем $1 < N_1 < \ldots < N_m$ – номера шагов, на которых производится аппроксимация множества 0-управляемости в соответствии с алгоритмами 1 или 2.

Точность каждой аппроксимации при этом составляет $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ соответственно. Определим аппроксимирующую последовательность рекуррентно:

$$\hat{\mathcal{X}}_{N_1,\dots,N_m}(N) = \begin{cases} \mathcal{X}(N), & N < N_1, \\ \mathrm{Approx}(\mathcal{X}(N_1), \varepsilon_1), & N = N_1, \\ \hat{\mathcal{X}}_{N_1,\dots,N_{m-1}}(N), & N_1 < N < N_m, \\ \mathrm{Approx}(\hat{\mathcal{X}}_{N_1,\dots,N_{m-1}}(N_m), \varepsilon_m), & N = N_m, \\ A^{-1}\hat{\mathcal{X}}_{N_1,\dots,N_m}(N-1) + (-A^{-1}\mathcal{U}), & N > N_m. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, решение задачи быстродействия в соответствии с [1] можно построить при помощи класса множеств (4), число вершин которых ограничено, вместо класса (2), сложность описания которых растет экспоненциально.

4. Коррекция орбиты спутника

Рассмотрим задачу наискорейшей коррекции орбиты спутника. Космический аппарат предполагается материальной точкой, находящейся в окрестности круговой орбиты, определяемой радиусом R_0, радиальной скоростью v_{R0} и трансверсальной скоростью v_{T0}. Управление осуществляется двигателями малой тяги, и на него накладываются ограничения, связанные с мощностью двигательной установки.

В предположении, что управление является релейным, возможно рассмотреть в качестве наблюдаемых параметров системы вектор состояния $x(k) = (\Delta r(k\delta), \Delta v_R(k\delta), \Delta v_T(k\delta))^{\mathrm{T}}$ в моменты времени $k\delta$, т.е. сразу после смены режима управления, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Данное предположение позволяет описать движение спутника конечно-разностными соотношениями вида (1) с параметрами

$$A = \begin{pmatrix} 2-\cos\delta & \sin\delta & 2-2\cos\delta \\ \sin\delta & \cos\delta & 2\sin\delta \\ -1+\cos\delta & -\sin\delta & -1+2\cos\delta \end{pmatrix}, \mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} 1-\cos\delta & -2\sin\delta+2\delta \\ \sin\delta & 2-2\cos\delta \\ \cos\delta-1 & 2\sin\delta-\delta \end{pmatrix} [-1;1]^2. \tag{5}$$

Для полученной системы построим точное и приближенное решение задачи быстродействия при помощи множеств (2) и (4).

Выбор номера шага $N_j \in \mathbb{N}$ и точности ε_j для проведения очередной аппроксимации в (4) определеяются из условий

$$\mathrm{card}\, \hat{\mathcal{X}}_{N_1,\dots,N_{j-1}}(N_j, 0) > C_{\max}, \quad \varepsilon_j = 0.05 \mathrm{diam}\, \hat{\mathcal{X}}_{N_1,\dots,N_{j-1}}(N_j, 0),$$

где натуральная константа $C_{\max}$ является заданной величиной. Для начального состояния x_0 через TIME_1 и TIME_2 обозначим машинное время, затрачиваемое ЭВМ на вычисление точного значения $N_{\min}$ и оптимального процесса соответственно. Через $\underline{\mathrm{TIME}_1}$ и $\underline{\mathrm{TIME}_2}$ – машинное время, затрачиваемое ЭВМ на вычисление оценки $\underline{N_{\min}}$ и субоптимального процесса на основе последовательности (4).

В таблицах 1 и 2 представлены результаты вычислений для $\delta = 0.25$. При значении $C_{\max} = 1000$ аппроксимации проводились на шагах $N_1 = 17$, $N_2 = 32$, $N_3 = 47$. При значении $C_{\max} = 2000$ аппроксимации проводились на шагах $N_2 = 23$, $N_2 = 44$.

Таблица 1. Сопоставление точности решения для системы (5)

	$N_{\min}$	$C_{\max} = 1000$ $\underline{N_{\min}}$	$C_{\max} = 2000$ $\underline{N_{\min}}$
$x_0^1 = (-3, 7, 10)^{\mathrm{T}}$	51	58	54
$x_0^2 = (2, -5, -7)^{\mathrm{T}}$	40	49	46
$x_0^3 = (-7, 0, 0)^{\mathrm{T}}$	30	40	34
$x_0^4 = (-7, 0, 0)^{\mathrm{T}}$	26	27	29
$x_0^5 = (0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$	16	16	16

Таблица 2. Сопоставление сложности решения для системы (5)

	TIME_1	TIME_2	$C_{\max} = 1000$ $\underline{\mathrm{TIME}_1}$	$C_{\max} = 1000$ $\underline{\mathrm{TIME}_2}$	$C_{\max} = 2000$ $\underline{\mathrm{TIME}_1}$	$C_{\max} = 2000$ $\underline{\mathrm{TIME}_2}$
x_0^1	$973.618c$	$5.383c$	$146.376c$	$0.64c$	$211.553c$	$0.998c$
x_0^2	$167.077c$	$2.309c$	$142.304c$	$0.515c$	$210.508c$	$0.936c$
x_0^3	$34.258c$	$1.03c$	$103.772c$	$0.406c$	$107.173c$	$0.702c$
x_0^4	$17.097c$	$0.639c$	$43.836c$	$0.374c$	$106.237c$	$0.452c$
x_0^5	$1.747c$	$0.140c$	$1.747c$	$0.140c$	$1.747c$	$0.140c$

5. Заключение

Использование аппроксимационных методов дает существенный выигрыш по времени вычислений при больших значениях $N_{\min}$. При этом сложность решения задачи быстродействия с экспоненциальной меняется на полиномиальную, так как выбор константы $C_{\max}$ гарантирует, что число вершин множества 0-управляемости либо его аппроксимации будет заранее ограничено. Хотя при малых значениях $N_{\min}$ применение аппроксимационных методов, напротив, способно замедлить решение задачи синтеза. При этом следует учитывать, что значение функция потерь в задаче быстродействия растет при использовании аппроксимационного подхода.

Список литературы

1. Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю. О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // Автоматика и телемеханика. 2021. № 12. С. 48–72.
2. Weibel C. Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Lausanne: EPFL, 2007. 114 p.
3. Каменев Г.К. Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2010. 119 с.