УДК 517.977.58

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ ПРЯМОГО МЕТОДА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О.Н. Корсун
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
Россия, 125319, Москва, ул. Викторенко, 7
E-mail: marmotto@rambler.ru

А.В. Стуловский
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
Россия, 125319, Москва, ул. Викторенко, 7
E-mail: avstlv@gosniias.ru

Ключевые слова: прямые методы оптимального управления, численная оптимизация, эволюционные алгоритмы.

Аннотация: Доклад посвящен возможным приложениям прямых методов поиска оптимального управления. Показано, что с помощью прямых методов можно решать как традиционные задачи управления, так и задачи, выходящие за пределы данной области. При этом базовый математический аппарат остается практически неизменным. Приводятся примеры решения практических задач, таких как оптимизация движения динамического объекта, получение терминального управления, а также сглаживание измерений, восстановление отсутствующих сигналов, оценивание предельных значений характеристик динамической системы, планирование эксперимента для повышения его информативности.

1. Введение

Большинство методов поиска оптимального управления можно разделить на две категории – прямые и непрямые методы. В основе непрямых методов лежит определение условий оптимальности первого порядка для рассматриваемой задачи. Этот подход приводит к постановке двухточечной краевой задачи, решение которой осуществляется на основе вариационного исчисления [1].

Прямые методы предполагают известным общий вид решения, например, что оно представляет собой сумму функций какого-либо линейно независимого базиса. Тогда требуется определить только коэффициенты данного разложения, исходя из условия минимума целевого функционала. Таким образом бесконечномерная задача оптимизации аппроксимируется задачей параметрической оптимизации конечной размерности (задачей нелинейного программирования). Особый интерес к использованию прямых методов поиска оптимального управления связан с их относительной простотой и ростом доступных исследователям вычислительных мощностей.

С другой стороны, многие задачи нелинейного программирования могут быть интерпретированы как задачи поиска оптимального управления. В рамках доклада планируется продемонстрировать применимость прямых методов поиска оптимального управления для нескольких существенно различных практических задач.

2. Формулировка метода

2.1. Задача нелинейного программирования

В общем виде задача нелинейного программирования имеет следующий вид

(1) $$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \to \min_{\mathbf{u} \in U},$$

где $\mathbf{x}$ - вектор фазовых координат, $\mathbf{u}$ - вектор управления, U - множество допустимых значений вектора управления.

Допущение прямых методов состоит в том, что вектор управлений $\mathbf{u}$ может быть представлен как

$$\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \, \mathbf{\Psi}_i(t),$$

где $\mathbf{a}$ – вектор параметров, $\mathbf{a} \in R^n$, $\mathbf{\Psi}_i$ – некоторые базисные функции.

В этом случае решение (1) состоит в определении вектора параметров $\mathbf{a}$, который обеспечивает минимум функционала. Это позволяет переписать задачу в виде

(2) $$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{a}), t) \to \min_{\mathbf{u} \in U}.$$

В зависимость от конкретной постановки могут быть наложены дополнительные ограничения, как на значения фазовых координат, так и на значения управлений или определяющих их параметров.

2.2. Метод решения

В ряде практических случаев управления являются непрерывными и имеют непрерывную производную или могут быть с хорошей точностью приближены подобной функцией. Ограничение рассматриваемых сигналов только гладкими позволяет описывать их с использованием относительно небольшого числа параметров. В данной работе используется представление в виде Эрмитовых сплайнов третьего порядка. В качестве их параметров достаточно определить только значение функции и ее производной в узлах сплайна [2].

Для решения оптимизационной задачи (2) применялся алгоритм роя частиц, относящийся к семейству популяционных алгоритмов оптимизации [3, 4]. Преимуществами данного выбора являются отсутствие необходимости вычислять градиент минимизируемого функционала и малая чувствительность к начальным условиям, поскольку алгоритм использует не начальное приближение, а область возможных значений параметров [5].

3. Рассматриваемые задачи

Широкий круг задач может быть интерпретирован как задачи поиска оптимального управления. Далее приводятся некоторые встречающиеся на практике примеры.

3.1. Формирование маневра

Данная задача представляет собой пример классической задачи оптимального управления – оптимизация траектории [6], на которой достигается экстремум заданного функционала. Самый распространенный случай – получение максимально точной аппроксимации заданных выходных сигналов системы.

При этом минимизируемый функционал, как правило, является разновидностью взвешенного критерия наименьших квадратов

(3) $$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{a}), t) = J\big(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\mathbf{a})\big) = \int_{t_0}^{T} \big(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\big)^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \big(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\big) \, dt,$$

где $\tilde{\mathbf{x}}$ – вектор заданных значений фазовых координат, $\mathbf{K}$ – матрица весовых коэффициентов, t_0, T – время начала и конца участка соответственно.

Хорошие результаты удается получить при сочетании прямых методов и метода обратных задач динамики [7]. Метод обратных задач позволяет получить алгебраические уравнения для части управляющих сигналов, тем самым заметно снижая вычислительную сложность, зачастую, без потерь в качестве управления.

3.2. Получение терминального управления

Данная задача представляет собой разновидность предыдущей. Отличие состоит в том, что ограничения накладываются на фазовые переменные системы только для конечного момента времени.

Выделив несколько характерных значений вектора конечных состояний системы и найдя для них семейство оптимальных траекторий, можно построить границы области, из которой возможно достижение заданных конечных значений с учетом имеющихся ограничений [8].

Если распространить ограничения, накладываемые на терминальное положение системы, на весь участок, то мы получим следующий тип оптимизационной задачи.

3.3. Оценивание предельных характеристик

Примером задачи на оценивание предельных характеристик является определение максимальной дальности планирования летательного аппарата с выключенным или отказавшим двигателем.

Роль ограничений на значения фазовых переменных выполняет математическая модель движения летательного аппарата в вертикальной плоскости. В качестве управляющего сигнала используется угол тангажа, а целевой функционал представлен только терминальным членом

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = -X(T),$$

где X –- пройденное расстояние, $t = [0, T]$ – рассматриваемый промежуток времени.

3.4. Восстановление и сглаживание сигналов

Методы прямого управления могут быть применены и для восстановления сигналов отсутствующих датчиков. При этом предпочтительно иметь математическую модель динамики объекта, что позволяет связать между собой различные параметры движения.

Искомые сигналы представляются в виде сплайнов, параметры которых дают решение задачи (2). Такая аппроксимация является весьма точной, если сигналы обладают достаточной степенью гладкости. Поскольку должно обеспечиваться соответствие выходов математической модели их известным значениям, то можно использовать функционал вида (3), в котором желаемые выходные сигналы заменяются их измеренными значениями.

Авторами рассматривалось две подобные задачи: восстановление значений угловых скоростей летательного аппарата на основе кинематических уравнений Эйлера и восстановление значений углов ориентации по проекциям перегрузок в связанной системе координат и скорости в земной системе координат.

Близкой задачей является сглаживание сигналов, полученных в ходе эксперимента. Функционал составляется из входов и выходов модели для учета налагаемых ею динамических ограничений. В случае упомянутой выше задачи оценки значений углов ориентации он принимает вид

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{a}), t) = \sum_{i=0}^{N} \Big(\Big(E_{\text{изм}}(t_i) - S\big(E(t_i)\big) \Big)^2 + \Big(\omega_{\text{изм}}(t_i) - S\big(\omega(t_i)\big) \Big)^2 +$$

$$+\left(S\big(E(t_i)\big) - E\left(S\big(\omega(t_i)\big)\right)\right)^2),$$

где $E_{изм}(t_i)$, $\omega_{изм}(t_i)$ – значения углов ориентации летательного аппарата и его угловых скоростей, содержащие погрешности; $S\big(E(t_i)\big)$, $S\big(\omega(t_i)\big)$ – сплайны, аппроксимирующие углы и угловые скорости; $E\left(S\big(\omega(t_i)\big)\right)$ значения углов ориентации, полученные из сплайна угловых скоростей при помощи кинематических уравнений Эйлера.

Отметим, что использование при сглаживании математической модели динамики объекта позволяет улучшить точность аппроксимации при наличии шумов измерений.

3.5. Планирование эксперимента

Гибкость прямых методов позволяет подобрать управление, повышающее качество решения задачи идентификации.

Управляющие сигналы задаются при помощи сплайнов и формируется математическая модель объекта управления. В качестве целевого функционала могут использоваться как относительные ошибки оценок идентифицируемых коэффициентов, когда они известны, так и характеристики обусловленности задачи, например, среднеквадратичные отклонения оценок или числа обусловленности информационной матрицы.

4. Заключение

Таким образом, прямые методы представляют собой перспективное направление развития методов оптимизации. Они могут быть применены при решении многих практических задач. Достоинством методов является относительная простота алгоритмической и программной реализации.

Список литературы

1. Методы классической и современной теории автоматического управления. / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд. МГТУ им. Баумана, 2004. 656 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.П., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
3. Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А. Методы глобальной оптимизации: метаэвристические стратегии и алгоритмы. М.: Вузовская книга, 2013. 244 с.
4. Mirjalili S., Song Dong J., Lewis A., Sadiq A.S. Particle Swarm Optimization: Theory, Literature Review, and Application in Airfoil Design // Nature-inspired Optimizers: Theories, Literature Reviews and Applications. Switzerland, AG: Springer Nature, 2020. P. 167-184.
5. Корсун О.Н., Стуловский А.В. Прямой метод формирования оптимального программного управления летательным аппаратом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 2. С. 75-89.
6. Rao A.V. Trajectory Optimization: A Survey // Optimization and Optimal Control in Automotive Systems. Switzerland: Springer, 2014. P. 3-21.
7. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. М.: Машиностроение, 2004. 576 с.
8. Корсун О.Н., Николаев С.В., Стуловский А.В. Методика расчета границ зоны выхода летательного аппарата в заданную точку // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2021. № 8(206). С. 3-11.