УДК 517.977.5

О ПОЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А.М. Котюков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: amkotyukov@mail.ru

Н.Г. Павлова

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН;

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Россия, 392036, Тамбов, Интернациональная ул., 33

E-mail: natasharussia@mail.ru

Ключевые слова: накрывающее отображение, точка совпадения, сложная система, равновесие.

Аннотация: Исследуется вопрос существования в сложных экономических системах с помощью результатов теории нелинейного анализа. Рассмотрена сложная экономическая система с подсистемой открытого рынка, в которой отображения спроса и предложения восстановлены по соответствующим эластичностям. Положение равновесия рассматривается как неподвижная точка композиции отображения спроса и обратного отображения предложения. Получены достаточные условия существования и единственности положения равновесия в этой модели.

1. Введение

В задачах регулирования рыночных цен, управления ресурсами производства особую роль играет понятие положения равновесия. Под равновесием понимается ситуация на рынке, при которой спрос на товары равен их предложению. Определение положения равновесия в различных экономических системах позволяет не только сформировать представление о текущей экономической ситуации, но и разработать аппарат управления с целью улучшения этой ситуации.

Нами рассматривается модель сложной системы рынка, состоящей из большого числа как товаров, так и потребителей и продавцов, в которой спрос и предложение на товары восстанавливаются по соответствующим эластичностям спроса и предложения по цене. Понятие эластичности было введено А. Маршалом в 1890 году [1]. Эластичность спроса по цене показывает, как меняется спрос на товар при соответствующем изменении цены на него. Аналогично определяется эластичность предложения по цене. Положение равновесия рассматривается как неподвижная точка [2] композиции отображения спроса с обратным отображением предложения.

2. Постановка задачи

Пусть на рынке имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, цены на которые описываются вектором цен $p \in \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n) \mid x_i > 0, i = \overline{1,n}\}$. Мы предполагаем, что в модели присутствуют естественные ограничения на цены, то есть заданы векторы $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n_+$, $c_1 = (c_{11}, ..., c_{1n})$, $c_2 = (c_{21}, ..., c_{2n})$ такие, что $c_{1i} < c_{2i}$, $p_i \in [c_{1i}; c_{2i}]$ для любого $i = \overline{1,n}$. Обозначим $P = [c_{11}, c_{21}] \times ... \times [c_{1n}, c_{2n}]$.

Рассмотрим пока неизвестные отображения спроса $D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $D(p) = (D_1(p), ..., D_n(p))$, и предложения $S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $S(p) = (S_1(p), ..., S_n(p))$. Эти отображения в будущем будут иметь специальный вид. Предположим, что при некоторых ценах $p^* \in P$ нам известны значения спроса $D^* = D(p^*)$, $D^* = (D^*_1, ..., D^*_n)$ и предложения $S^* = S(p^*)$, $S^* = (S^*_1, ..., S^*_n)$. Пусть также известны матрицы $\mathcal{E} = (E_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, где элементы $E_{ij} \in \mathbb{R}$ и $\tilde{E}_{ij} \in \mathbb{R}$ удовлетворяют равенствам

$$E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p)\frac{p_j}{D_i(p)}, \quad \tilde{E}_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p)\frac{p_j}{S_i(p)}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Здесь $E_{ij}, \tilde{E}_{ij}$ – эластичности спроса на i-й товар и предложения i-го товара по цене на j-й товар соответственно. Наконец, пусть известен вектор импорта $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_n)$ такой, что $a_i \geqslant 0$ для любого $i = \overline{1,n}$ и существует номер i такой, что $a_i > 0$. a_i является количеством i-го товара, который импортируется на рынок.

Определение 1. *Набор $\sigma = (c_1, c_2, a, p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ называется моделью открытого рынка. Множество всех таких моделей обозначим через Σ.*

В [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Параметры модели $\sigma \in \Sigma$ однозначно определяют отображения $D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $\quad S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ по формулам:*

$$D_i(p_1, ..., p_n) = D^*_i \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{p^*_j}\right)^{E_{ij}}, \quad S_i(p_1, ..., p_n) = S^*_i \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{p_j}{p^*_j}\right)^{\tilde{E}_{ij}}, \; i = \overline{1,n}.$$

Определение 2. *Положением равновесия в модели $\sigma \in \Sigma$ назовем вектор $p^0 \in P$ такой, что $D(p^0) = S(p^0) + a$.*

Задача сводится к определению условий, при которых положение равновесия в модели σ существует.

Модель σ является обобщением модели закрытого рынка, исследованной в [4, 5]. В этой модели отсутствует вектор импорта, что позволяет получить необходимые условия и достаточные условия с помощью результатов теории систем линейных уравнений и неравенств. В модели открытого рынка вопрос о существовании положения равновесия нельзя свести к вопросу о совместности системы линейных уравнений и неравенств, однако возможно использовать принцип сжимающих отображений.

3. Основной результат

Покажем, что S – биекция, если $\det \tilde{\mathcal{E}} \neq 0$. Рассмотрим уравнение $S(p) = s$, $s \in S(P)$, $s = (s_1, ..., s_n)$ относительно $p \in P$. Это уравнение представляет собой систему:

$$S_i^* \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}} = s_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Взяв логарифм от левой и правой частей в каждом уравнении последней системы, мы получим эквивалентную систему:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{E}_{ij} \ln p_j = \ln \left(\frac{S_i}{S_i^*} \right) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{E}_{ij} \ln p_j^*.$$

Поскольку $\det \tilde{\mathcal{E}} \neq 0$, то система (1) совместна по теореме Кронекера–Капелли [6], а по следствию из нее ее решение единственно. Следовательно, решение уравнения $S(p) = s$ по эквивалентности тоже единственно. Таким образом, отображение S биективно.

Достаточные условия существования положения равновесия были получены в [4], однако они не гарантировали единственность положения равновесия. Нами была получена более сильная теорема, гарантирующая вместе с существованием и единственность положения равновесия. Перейдем к формулировке основного результата. Положим

$$(2) \qquad \bar{\alpha}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\tilde{F}_{ki}| \max\{c_{1i}^{1-\tilde{E}_{ki}}, c_{2i}^{1-\tilde{E}_{ki}}\}}{S_k^* \prod\limits_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-\tilde{E}_{kj}} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \min\{c_{1i}^{\tilde{E}_{kj}}, c_{2i}^{\tilde{E}_{kj}}\}},$$

$$(3) \qquad \bar{\beta}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} D_i^* \left(\prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{n} |E_{ik}| \max_{m=1,2} \{c_{mk}^{E_{ik}-1}\} \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \max_{m=1,2} \{c_{mj}^{E_{ij}}\},$$

$$(4) \qquad \bar{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|,$$

где $\tilde{F}_{ij}$ – элемент матрицы $\tilde{\mathcal{F}}$, обратной к матрице $\tilde{\mathcal{E}}$, а $\tilde{c} = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

Здесь и далее $\mathrm{lip}(A|M)$ – точная нижняя грань констант Липшица отображения A, определенного на множестве M.

Лемма 1. *Пусть* $\det \tilde{E} \neq 0$. *Тогда* $\mathrm{lip}(S^{-1}|S(P)) \leqslant 1/\bar{\alpha}(\sigma)$, $\mathrm{lip}(D|P) \leqslant \bar{\beta}(\sigma)$.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ определим две нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2|x_i|}{c_{2i} - c_{1i}}, \quad \|x\|_2 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \ x = (x_1, ..., x_n).$$

Рассмотрим отображения $D, S : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$, где $X = Y = \mathbb{R}_+^n$, а метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ соответственно. Сначала оценим величину $\mathrm{lip}(S^{-1}|S(P))$. Заметим, что отображение S удовлетворяет условиям теоремы об обратном отображении, согласно которой для любого вектора $p \in \mathrm{int}\, P$

$$\frac{\partial S^{-1}}{\partial s}(S(p)) = \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1}.$$

Следовательно, $\mathrm{lip}(S^{-1}|S(P)) = \sup_{p \in \mathrm{int}\, P} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1} \right\|$.

Для того, чтобы оценить сверху $\mathrm{lip}(S^{-1}|S(P))$, нам надо знать $\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{-1}$. Обозначим $\pi_i(p) = \prod\limits_{j=1}^{n}(p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}}p_j^{\tilde{E}_{ij}}$. Тогда нетрудно получить, что $\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{-1}_{ik} = (S_k^*\pi_k(p))^{-1}p_i\tilde{F}_{ik},\ i,k=\overline{1,n}$, где $\tilde{F}_{ik}$ – элемент матрицы $\tilde{\mathcal{F}}$, обратной к $\tilde{\mathcal{E}}$.

Теперь мы можем оценить $\mathrm{lip}(S^{-1}|S(P))$. Для любого $p \in P$ имеем:

$$\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{-1}\right\| = \max_{\|s\|_2=1}\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^{-1}s\right\| = \max_{\|s\|_2=1}\max_{i=\overline{1,n}}\frac{2}{c_{2i}-c_{1i}}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{p_i\tilde{F}_{ik}}{S_k^*\pi_k(p)}s_k\right| \leqslant$$

$$\max_{i=\overline{1,n}}\frac{2}{c_{2i}-c_{1i}}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\tilde{F}_{ki}|\max\{c_{1i}^{1-\tilde{E}_{ki}},c_{2i}^{1-\tilde{E}_{ki}}\}}{S_k^*\prod\limits_{j=1}^{n}(p_j^*)^{-\tilde{E}_{kj}}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\min\{c_{1i}^{\tilde{E}_{kj}},c_{2i}^{\tilde{E}_{kj}}\}} = \frac{1}{\bar{\alpha}(\sigma)}.$$

Таким образом, $\mathrm{lip}(S^{-1}|S(P)) = \sup_{p\in \mathrm{int}\,P}\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^{-1}(p)\right\| \leqslant 1/\bar{\alpha}(\sigma)$. Теперь мы аналогичным образом оценим $\mathrm{lip}(D|P)$. Для любого $p \in \mathrm{int}\,P$ имеем

$$\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\| = \max_{\|x\|_1=1}\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)x\right\| \leqslant \max_{\|x\|=1}\max_{i=\overline{1,n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{D_i^*|E_{ik}|}{p_k}|x_k|\prod_{j=1}^{n}(p_j^*)^{-E_{ij}}p_j^{E_{ij}} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=\overline{1,n}}D_i^*\left(\prod_{j=1}^{n}(p_j^*)^{-E_{ij}}\right)\sum_{k=1}^{n}|E_{ik}|\max_{m=1,2}\{c_{mk}^{E_{ik}-1}\}\frac{c_{2k}-c_{1k}}{2}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\max_{m=1,2}\{c_{mj}^{E_{ij}}\} = \bar{\beta}(\sigma).$$

Таким образом, $\mathrm{lip}(D|P) = \sup_{p\in\mathrm{int}\,P}\left\|\frac{\partial D}{\partial p}(p)\right\| \leqslant \bar{\beta}(\sigma)$. Лемма доказана.

Теорема 2 (Достаточные условия существования положения равновесия в модели σ). *Пусть параметры модели $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяют следующим условиям: 1) $\det\tilde{\mathcal{E}} \neq 0$; 2) $\bar{\gamma}(\sigma) < \bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)$. Тогда в модели σ существует единственное положение равновесия $p^0 \in \mathrm{int}\,P$.*

Доказательство.

Наша цель – применить принцип сжимающих отображений.

В силу леммы 1 и условия 2) теоремы мы получаем, что существуют такие числа $\alpha > 0, \beta > 0$, что $\bar{\gamma}(\sigma) < \alpha - \beta$ и отображение D удовлетворяет на P условию Липшица с константой β, а отображение S удовлетворяет условию Липшица на $S(P)$ с константой $1/\alpha$.

Рассмотрим отображение $B : P \to \mathbb{R}^n_+,\ B(p) = S^{-1}(D(p)-a)$. Покажем, что B является сжимающим. Прежде всего заметим, что

$$\mathrm{lip}(S^{-1}\circ(D-a)|P) \leqslant \mathrm{lip}(S^{-1}|(D-a)(P))\cdot\mathrm{lip}(D-a|P).$$

Действительно, если $D : X \to Y$ – липшицево с константой Липшица $\mathrm{lip}(D|P)$, а $S^{-1} : Y \to X$ – липшицево с константой $\mathrm{lip}(S^{-1}|(D-a)(P))$, то для любых $p', p'' \in P$ выполнено $\|B(x')-B(x'')\| = \|(S^{-1}\circ(D-a))(x') - (S^{-1}\circ(D-a))(x'')\| \leqslant \mathrm{lip}(S^{-1}|(D-a)(P))\|(D-a)(x')-(D-a)(x'')\| \leqslant \mathrm{lip}(S^{-1}|(D-a)(P))\cdot\mathrm{lip}(D-a|P)\|x'-x''\|$, откуда вытекает требуемое неравенство. Далее, очевидно, что $\mathrm{lip}(D-a|P) = \mathrm{lip}(D|P)$. Наконец, покажем, что $\mathrm{lip}(S^{-1}|(D-a)(P)) \leqslant \mathrm{lip}(S^{-1}|S(P))$. Для этого достаточно показать, что $(D-a)(P) \subseteq S(P)$. Пусть $y \in (D-a)(P)$. Тогда существует $x \in P$

такой, что $(D-a)(x)=y$. Следовательно, $\rho_Y((D-a)(x),S(\tilde{c}))=\rho_Y(D(x)-a,S(\tilde{c}))\leqslant \rho_Y(D(x),D(\tilde{c}))+\rho_Y(D(\tilde{c}),S(\tilde{c})+a)<\beta\rho_X(x,\tilde{c})+\alpha-\beta\leqslant\beta+\alpha-\beta=\alpha$. Таким образом, $y\in B_Y(S(\tilde{c}),\alpha)$. Далее, поскольку отображение S^{-1} является α-липшицевым, то

$$\rho_X(S^{-1}(S(\tilde{c})),S^{-1}\circ(D-a)(x))\leqslant\frac{1}{\alpha}\rho_Y(S(\tilde{c}),(D-a)(x))\leqslant 1,$$

откуда мы получаем, что $(D-a)(x)\in S(P)$. Таким образом, $(D-a)(x)\subseteq S(P)$.

Теперь оценим величину $\operatorname{lip}(B|P)$:

$$\operatorname{lip}(B|P)\leqslant\operatorname{lip}(S^{-1}|(D-a)(P))\cdot\operatorname{lip}(D-a|P)\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname{lip}(S^{-1}|S(P))\cdot\operatorname{lip}(D|P)=\frac{1}{\alpha}\beta<1,$$

так как $\beta<\alpha$.

Наконец, покажем, что $B(P)\subseteq P$. Действительно, для любого $p\in P$ имеем:

$$\rho_X(B(p),\tilde{c})=\rho_X(S^{-1}\circ(D-a)(p),S^{-1}(S(\tilde{c})))\leqslant\frac{1}{\alpha}\rho_Y((D-a)(p),S(\tilde{c}))<1.$$

Таким образом, отображение B является сжимающим. Поскольку P – полное метрическое пространство (как единичный шар с центом в точке $\tilde{c}$ внутри $\mathbb{R}^n$), по принципу сжимающих отображений [2] мы получаем, что существует единственное решение p^0 уравнения $B(p)=p$, откуда непосредственно вытекает, что в модели σ существует единственное положение равновесия $p^0\in\operatorname{int}P$. Теорема доказана.

4. Заключение

Полученные результаты могут быть использованы для решения большого числа различных экономических задач, таких как управление ресурсами, регулирование налога на добавочную стоимость и управление импортом товаров. Также результаты работы могут послужить основой для алгоритма поиска положения равновесия для моделей рыночных систем, построенных по статистическим данным.

Лемма 1 получена Павловой Н.Г. при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/). Теорема 2 получена Котюковым А.М. при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/).

Список литературы

1. Маршалл А. Принципы политической экономии. М.: Прогресс, 1993, 594 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с.
3. Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Stability and Non-Uniqueness of Equilibrium in an Open Market Model // Proceedings of the 15th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). Moscow, Russia, 2022. IEEE, 2022, P. 1–4.
4. Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications. 2021. Vol. 24, No 4. P. 130–144.
5. Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Nonuniqueness of Equilibrium in Closed Market Model // Advances in Systems Science and Applications. 2023. Vol. 23, No. 2. P. 184–194.
6. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линеная алгебра и геометрия. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 512 с.