

УДК 004.921+514

РАЗРАБОТКА ПРОЕКЦИОННОГО ПРИНЦИПА КОМПЬЮТЕРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ВОКСЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ

К.Ю. Запорожану

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
Россия, 127055, Москва, Вадковский пер., 3а
E-mail: kris5218@mail.ru

Н.Б. Толук

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная, 65
E-mail: nat_tolok@mail.ru

Ключевые слова: R-функция, полигональное моделирование, пиксель, воксельное моделирование, функционально-воксельное моделирование, M-образ, M-проекция.

Аннотация: В работе проводится исследование принципов современного компьютерного моделирования сложных геометрических объектов. Рассмотрены способы хранения данных для таких объектов с позиции затрачиваемой памяти, а также с учётом скорости их обработки. Сопоставляются поверхностные модели, активно применяемые в САПР-технологиях, с воксельными и функционально-воксельными моделями. Рассматривается проекционный принцип разложения функционально-воксельной модели на основе R-функционального моделирования, позволяющий структурно описать конструирование сложного геометрического объекта, применяя логические процедуры над его составляющими проекциями. Таким образом, предлагается новый формат хранения данных для составных трехмерных объектов с помощью функционально-воксельного моделирования.

1. Введение

Трёхмерное компьютерное представление геометрических объектов является основой в процессах исследовательского и виртуального моделирования, а также для технологий конструирования и проектирования. С этой целью создается множество программных комплексов различной направленности, которые содержат в себе функции конструирования на основе имеющихся графических библиотек. Наиболее употребимой в системах моделирования является поверхностная компьютерная модель. Это связано с относительной компактностью её представления, однако требует усложнения алгоритмов её обработки, что зачастую приводит к потере точности вычислений. В настоящее время всё большее распространение получает способ представления данных о форме и содержимом объектов с помощью воксельной информации. Использование вокселей – трёхмерных аналогов пикселей – всегда было сопряжено с чрезмерными затратами памяти, как дисковой, так и оперативной. Однако хранение объёмных данных таким образом имеет и неоспоримые плюсы, с чем и связана растущая популярность этого подхода. Во-первых, в таком виде может быть сохранён объект абсолютно произвольной формы. Во-вторых, сохраняется информация

о внутреннем строении объекта, что даёт преимущества в моделировании непрерывных сплошных изотропных и анизотропных сред и взаимодействий с этими моделями. Наиболее заметное применение воксельные данные получили в сферах проектирования, медицины, а также в компьютерных играх и развлечениях. Рассмотрим подробнее обе модели.

2. Компьютерные геометрические модели

2.1. Поверхностное моделирование

Полигональное моделирование — это самая первая разновидность трёхмерного моделирования, которая появилась в те времена, когда для определения точек в трёхмерном пространстве приходилось вводить вручную с клавиатуры координаты X , Y и Z . Как известно, если три или более точек координат заданы в качестве вершин и соединены рёбрами, то они формируют многоугольник (полигон), который может иметь цвет и текстуру. Соединение группы таких полигонов (полигональная сетка) позволяет смоделировать практически любой объект.

Полигональная сетка (рис. 1) — это совокупность вершин, рёбер и граней, которые определяют форму многогранного объекта в трёхмерной компьютерной графике и объёмном моделировании.

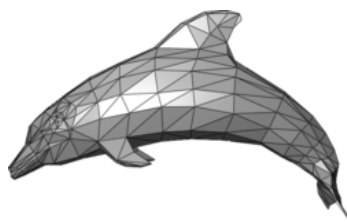


Рис. 1. Пример полигональной сетки, изображающей дельфина.

Современные средства представления поверхностных моделей активно применяют параметрические функции описания типа $x_i = X_i(t)$, основанные на определении координат точек поверхности объекта, что позволяет строить полигональные поверхности различной сингулярности. Однако, алгебраические функции вида $u = f(x, y, z)$, задаваемые на области и, включающие описание значений внутри, снаружи и на границе объекта, не приспособлены строить полигональные поверхности и для описания такой модели требуется регулярное распределение точек на заданной области. Таким свойством обладает воксельная модель.

2.2. Воксельное моделирование

В цифровых изображениях пиксель (сокращенно px), pel , [6] или элемент изображения [7] - это наименьший адресуемый элемент в растровом изображении или наименьший адресуемый элемент в матричном устройстве отображения.

Воксел (в разговорной речи воксель, англ. *Voxel* — образовано из слов: объёмный (англ. *volumetric*) и пиксель (англ. *pixel*)) — элемент объёмного изображения, содержащий значение элемента раstra в трёхмерном пространстве. Воксели являются аналогами двумерных пикселей для трёхмерного пространства.

2.3. Функционально-воксельное моделирование

Функционально-воксельный метод позволяет хранить в графических образах отображение локальных геометрических характеристик для заданной области (М-

образы) алгебраической функции, упрощая расчет в точке применением простого линейного полинома.

2.4. Сравнение перечисленных подходов к моделированию

Сравнительный анализ по основным критериям оценки вышеперечисленных подходов моделирования 3D объектов демонстрируется в таблице 1.

Таблица 1. Сравнительный анализ подходов моделирования.

	Полигональное моделирование	Пиксельное	Воксельное	Функционально-воксельный метод
Эскиз форм объекта	+	+	+	+
Хранение только координат опорных точек	в зависимости от представления полигональной сетки	-	+	+
Алгебраическое представление формы объекта	-	-	-	+
Требует много данных	+	+	+	-
Требует малого объема памяти	-	+	-	+
Быстрое вычисление	-	-	-	+
Четкое воспроизведение объекта	-	-	+	+
Масштабирование	+	-	+	+

Из таблицы видно, что функционально-воксельное моделирование является достаточно перспективным и заслуживает дальнейшего внимания в программных разработках.

3. Проекционный принцип компьютерного представления многомерных данных функционально-воксельной модели

Идея применения проекционного принципа представления функционально-воксельной модели на компьютере базируется на замечательном свойстве получения логической операции пересечения посредством R-функции, а также возможности построения «проекционных» предикатных функций. Такой функцией для трёхмерной области $u = f(x, y, z)$ можно назвать любую функцию, ограниченную двумя аргументами. В нашем случае это функции: $u = f(x, y)$, $u = f(x, z)$ и $u = f(y, z)$.

Исходим из того, что для построения функционально-воксельной модели типа $u = f(x, y, z)$ требуется записать пять трёхмерных массивов (M-образов), хранящих информацию о коэффициентах A, B, C, D, E для описания локальной функции:

$$Ax + By + Cz + Du + E = 0.$$

Проекционный принцип позволяет сократить хранимую информацию о том же объекте до восьми плоских образов $A_{xy}, B_{xy}, C_{xy}, D_{xy}, A_{xz}, B_{xz}, C_{xz}, D_{xz}$, представив его пересечением двух функций: $u = f(x, y)$ и $u = f(x, z)$. Функциональное представление таких функций по аналогии с M-образами будем называть M-проекциями.

На рис.2. представлен трёхмерный образ цилиндра, разложенный на M-проекции: горизонтальная полоса $u = f(x, z)$ и окружность $u = f(x, y)$, формулы представлены ниже:

$$\begin{aligned} U_{xz}(x, z) &= 1 - z^2 \\ U_{xy}(x, y) &= 1 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

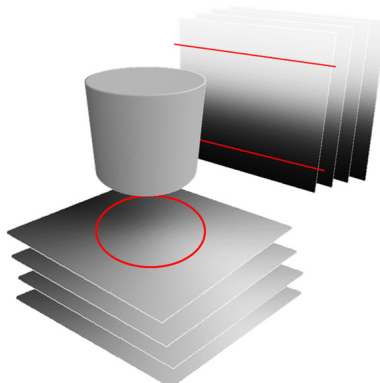


Рис. 2. Предположительное разделение цилиндра на простейшие образы (M-образы).

Для наполнения M-проекций характеристиками применим принцип линейной аппроксимации области для функций U_{xz} и U_{xy} . Для этого определим локальные функции в каждой точке области.

Локальная функция для двухмерной области плоскости выглядит следующим образом:

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$$

Уравнение плоскости по трем заданным точкам в пространстве, формирует матрицу:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

И если разложить определитель матрицы по первой строке, получим:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x_i + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} y_i + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z_i + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

В результате разложения матрицы получаем коэффициенты для уравнения плоскости

$$A_i = y_1 * (z_2 - z_3) - y_2 * (z_1 - z_3) + y_3 * (z_1 - z_2)$$

$$B_i = -(x_1 * (z_2 - z_3) - x_2 * (z_1 - z_3) + x_3 * (z_1 - z_2))$$

$$C_i = x_1 * (y_2 - y_3) - x_2 * (y_1 - y_3) + x_3 * (y_1 - y_2)$$

$$D_i = -(x_1 * (y_2 * z_3 - y_3 * z_2) - x_2 * (y_1 * z_3 - y_3 * z_1) + x_3 * (y_1 * z_2 - y_2 * z_1))$$

($y_1 * z_2 - y_2 * z_1$)

В результате M-проекции функции цилиндра выглядит следующим образом:

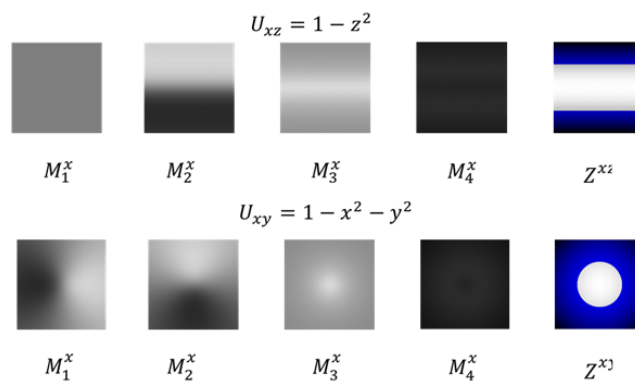


Рис. 3. M-образы цилиндра.

Для применения M-проекций для трёхмерной области необходимо определить коэффициенты E_{xy} и E_{xz} :

$$E_{xy} = -A_{xy}x - B_{xy}y - C_{xyz}z - D_{xy}u,$$

$$E_{xz} = -A_{xz}x - B_{xz}y - C_{xzz}z - D_{xz}u.$$

Получив описание M-проекций для трёхмерной области можно применить операцию R-функционального пересечения ФВ-моделей для реализации геометрической фигуры «цилиндр».

4. Заключение

Основным инструментом задания геометрического объекта теперь является алгебраическая функция, позволяющая описать заданную область сложной фигуры уменьшенной размерности. Разделяя сложный объект трехмерного пространства на простейшие M-проекции для удобства хранения информации предположительно позволит нам на порядок сократить объем хранения данных. В дальнейшем будет разработан аппаратный комплекс для обработки информации и реализация данного принципа.

Список литературы

1. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей: монография. Харьков: Изд-во ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
2. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
3. Рвачёв В.Л. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. Киев: Наукова думка 1990. 216 с.
4. Толоч А.В. Локальная компьютерная геометрия. М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. 152 с.
5. Толоч А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 112 с.
6. Фоули, Дж. Ди, Ван Дам, А. Основы интерактивной компьютерной графики. Реддинг, Массачусетс: Эддисон-Уэсли, 1982. 712 с.
7. Граф Р.Ф. Современный словарь электроники. Оксфорд: Ньюнес, 1999. 569 с.