

УДК 517.9

# ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА В МЕМБРАНЕ

**Н.А. Манакова**

*Южно-Уральский государственный университет*

Россия, 454080, Челябинск, проспект Ленина, 76

E-mail: manakovana@susu.ru

**О.В. Гаврилова**

*Южно-Уральский государственный университет*

Россия, 454080, Челябинск, проспект Ленина, 76

E-mail: gavrilovaov@susu.ru

**Н.Г. Николаева**

*Южно-Уральский государственный университет*

Россия, 454080, Челябинск, проспект Ленина, 76

E-mail: nikolaevang@susu.ru

**Ключевые слова:** задача стартового управления, задача стартового управления и финального наблюдения, полулинейные уравнения соболевского типа, задача Шоултера-Сидорова, система уравнений Фитц Хью-Нагумо, слабое обобщение решение.

**Аннотация:** В работе исследуются задача стартового управления и финального наблюдения и задача стартового управления для математической модели распространения нервного импульса в мембранной оболочке, основанная на вырожденной системе уравнений Фитц Хью-Нагумо с начальным условием Шоултера-Сидорова-Дирихле. Эта система относится к классу уравнений реакции-диффузии и описывает распространения волн в активных биологических средах, таких как сердечная мышца, или мозговая ткань. Проводится редукция представленной модели к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа, строятся достаточные условия существования решения задачи стартового управления и финального наблюдения и задачи стартового управления в слабом обобщенном смысле. На основе проекционного метода и метода декомпозиции строится алгоритм нахождения численного решения задачи начального регулирования распространения нервного импульса в мембране. Проведено численное исследование и представлен результат вычислительного эксперимента.

# 1. Введение

Методы математического моделирования широко применяются при исследовании электрофизиологии сердца. Среди явлений, исследуемых математическими методами, наибольший интерес представляют процессы распространения возбуждения в миокарде. Широко используемой математической моделью процесса возбуждения электрического поля в системе нервов или в сердечной мышце является система уравнений Фитц Хью-Нагумо [1, 2]:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon v_t = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 w - \varkappa_1 v + f_1, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 w - \varkappa_2 v - w^3 + f_2. \end{cases}$$

Здесь  $w = w(s, t)$  – функция, описывающая динамику мембранного потенциала;  $v = v(s, t)$  – медленная восстанавливающая функция, связанная с ионными токами;  $\beta_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbb{R}_+$  – фиксированные параметры, характеризующие:  $\varkappa_1, \beta_1$  – порог возбуждения и его скорость,  $\alpha_1$  – электропроводность среды,  $\alpha_2$  – реполяризацию среды, вектор-функция  $f = (f_1, f_2)$  описывает источник возбуждения. Нулевое решение системы при  $\beta_2 < 0$  асимптотически устойчиво, а при  $\beta_2 > 0$  – неустойчиво [3]. Качественный анализ системы уравнений (1) в предположении, что скорость изменения одной компоненты существенно превосходит скорость другой в случае  $\beta_2 > 0$  впервые был осуществлен в [4].

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с гладкой границей класса  $C^\infty$ . Рассмотрим вырожденную ( $\varepsilon = 0$ ) систему (1) в случае, когда  $\beta_2 < 0$  и  $\beta_1 = \varkappa_2$ :

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = \alpha_1 \Delta v + \beta_1 w - \varkappa_1 v + f_1, \\ w_t = \alpha_2 \Delta w + \beta_2 w - \varkappa_2 v - w^3 + f_2 \end{cases}$$

с краевым условием

$$(3) \quad v(s, t) = 0, \quad w(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R},$$

условием Шоултера-Сидорова

$$(4) \quad w(s, 0) = u_0(s), \quad s \in \Omega.$$

Начально-краевая задача (3), (4) для системы уравнений (2) в специальном образом построенных функциональных пространствах редуцируются к задаче Шоултера-Сидорова

$$L(x(0) - u(s)) = 0$$

для абстрактного полулинейного уравнения

$$L\dot{x} + Mx + N(x) = f, \quad \ker L \neq \{0\},$$

и относится к широкому классу уравнений соболевского типа. Нас интересует задача управления

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad},$$

решениями задачи (2) – (4), где  $J(x, u)$  – некоторый специальным образом построенный функционал, который задается в зависимости от рассматриваемой задачи управления;  $U_{ad}$  – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространства управления  $U$ .

## 2. Задача управления

Положим  $\mathfrak{H}_i = \overset{\circ}{W} \frac{1}{2}(\Omega)$  и  $\mathfrak{B}_i = L_4(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$ . Рассмотрим гильбертово пространство  $\mathcal{H} = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$  со скалярным произведением  $[\cdot, \cdot]$ , отождествленное со своим сопряженным. Определим пространства  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$  и  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ , а через  $\mathfrak{H}^*$ ,  $\mathfrak{B}^*$  обозначим сопряженные пространства к пространству  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B}$  относительно скалярного произведения в  $\mathcal{H}$  соответственно. Пусть  $x = (v, w)$ ,  $\zeta = (\xi, \eta)$ , определим операторы

$$[Lx, \zeta] = \langle w, \eta \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{H},$$

$$[Mx, \zeta] = \langle -\alpha_1 \Delta v - \beta_1 w + \varkappa_1 v, \xi \rangle + \langle -\alpha_2 \Delta w + |\beta_2| w + \beta_1 v, \eta \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{H},$$

$$[N(x), \zeta] = \langle w^3, \eta \rangle, \quad x, \zeta \in \mathfrak{B}.$$

Построим множество  $\text{coim } L = \{0\} \times \mathfrak{H}_2$  и рассмотрим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid v \in L_2(0, T; \mathfrak{H}_1), w \in L_\infty(0, T; \text{coim } L) \cap L_4(0, T; \mathfrak{B}_2)\}.$$

**Определение 1.** Вектор-функцию  $x \in \mathfrak{X}$  при  $T \in \mathbb{R}_+$  назовем слабым обобщенным решением задачи Шоултера-Сидорова, если она удовлетворяет

$$\int_0^T \left( [L \frac{dx}{dt}, \zeta] + [Mx + N(x), \zeta] \right) dt = \int_0^T [f, \zeta] dt, \\ [L(x(0) - u_0), \zeta] = 0, \quad \forall \zeta \in \mathcal{H}.$$

**Теорема 1.** [4] Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta_2 \in \mathbb{R}_-$ ,  $\beta_1 = \varkappa_2$  и  $n \leq 4$ , тогда при любых  $u_0 \in \mathfrak{H}$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ , существует единственное решение  $x \in \mathfrak{X}$  задачи (2) – (4).

Построим пространство управлений  $U = \mathfrak{B}_2$  и выберем  $U_{ad} \subset U$  – непустое, замкнутое, выпуклое множество. Построим целевой функционал и рассмотрим – задачу стартового управления и финального наблюдения

$$(5) \quad J(x(T), u) = \vartheta \|v(T) - v_d\|_{\mathfrak{H}_1}^2 + \vartheta \|w(T) - w_d\|_{\mathfrak{B}_2}^4 + (1 - \vartheta) \|u_0\|_{\mathfrak{B}_2}^4 \rightarrow \inf,$$

где  $\vartheta \in (0, 1)$ ,  $x_d = (v_d, w_d)$  – требуемое состояние системы, которого она достигает при минимальном начальном воздействии по прошествии времени  $t = T$ ;

– задачу стартового управления

$$(6) \quad J(x, u) = \vartheta \|v - v_d\|_{L_2(0, T; \mathfrak{H}_1)}^2 + \vartheta \|w - w_d\|_{L_4(0, T; \mathfrak{B}_2)}^4 + (1 - \vartheta) \|u_0\|_{\mathfrak{B}_2}^4 \rightarrow \inf,$$

где  $\vartheta \in (0, 1)$ ,  $x_d = (v_d, w_d)$  – требуемое состояние системы, которого она достигает при минимальном начальном воздействии.

**Определение 2.** Пару  $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{X} \times U_{ad}$  будем называть решением задачи управления, если

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u),$$

и пары  $(\hat{x}, \hat{u})$  удовлетворяют задаче (2) – (4) в смысле определения 1.

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta_2 \in \mathbb{R}_-$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta_1 = \varkappa_2$  и  $n \leq 4$ , тогда существует решение  $(\hat{x}(T), \hat{u})$  задачи (2) – (5).

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta_2 \in \mathbb{R}_-$ ,  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $\beta_1 = \varkappa_2$  и  $n \leq 4$ , тогда существует решение  $(\hat{x}, \hat{u})$  задачи (2) – (4), (6).

Используя теоретические результаты, полученные в работах [5, 6], был разработан и реализован алгоритм приближенного решения задачи стартового управления (2) – (4), (6) на основе модификации проекционного метода, методов декомпозиции и штрафа, а также метода Ритца.

**Пример 1.** Требуется найти решение задачи (2) – (4), (6) при следующих условиях:  $\Omega = (0, \pi)$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = -1$ ,  $\varkappa_1 = 1$ ,  $k = 3$ ,  $m = 3$ ,  $N = 2$ ,  
 $\theta = \frac{1}{2}$ ,  $\vartheta = \frac{99}{100}$ ,  $v_d = \frac{0,0781846323896656\sqrt{2}\sin(s)}{\sqrt{\pi}} + \frac{0,00174751922881693\sqrt{2}\sin(2s)}{\sqrt{\pi}}$ ,  
 $w_d = \frac{0.156369264779331\sqrt{2}\sin(s)}{\sqrt{\pi}} + \frac{0,00873759614408466\sqrt{2}\sin(2s)}{\sqrt{\pi}}$ ,  $f_1 = f_2 = 0$ .

Запишем систему уравнений (2) при сформулированных условиях:

$$(7) \quad \begin{cases} -v_{ss} - w + v = 0, \\ w_t - 2w_{ss} + w + v + w^3 = 0, s \in (0, \pi), t \in (0, 1). \end{cases}$$

Применяя метод декомпозиции, описанный в работе [6], линеаризуем систему (7), введением функции  $y = y(s, t)$ :

$$(8) \quad \begin{cases} -v_{ss} - w + v = 0, \\ w_t - 2w_{ss} + w + v + y^3 = 0, w = y, \end{cases}$$

Тогда решение задачи (3), (4), (7), сведется к нахождению  $(x, y, u)$ , где  $x = (v, w)$ . Приближенное решение задачи (3),(4),(8) будем искать в виде галеркинских сумм:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(s, t) &= \sum_{k=1}^m v_k(t)\varphi_k(s), \\ \tilde{w}(s, t) &= \sum_{k=1}^m w_k(t)\varphi_k(s), \\ \tilde{y}(s, t) &= \sum_{k=1}^m y_k(t)\varphi_k(s), \\ \tilde{u}(s) &= \sum_{k=1}^m u_k\varphi_k(s), \text{ где } \varphi_k(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ks). \end{aligned}$$

Опираясь на метод Ритца будем искать неизвестные  $y_k(t)$  в виде  $y_k(t) = \sum_{n=1}^N b_{k,n}t^n$ , учитывая, что  $y_k(0) = u_k$ .

Для нахождения требуемого приближенного решения задачи управления будем использовать метод штрафа, описанный в работе [6]. Зададим функционал штрафа в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} J(x, u) &= \vartheta \int_0^T \|v - v_d\|_{\mathfrak{B}_1}^2 dt + \vartheta\theta \int_0^T \|w - w_d\|_{\mathfrak{B}_2}^4 dt + \\ &+ \vartheta(1 - \theta) \int_0^T \|y - w_d\|_{\mathfrak{B}_2}^4 dt + (1 - \vartheta)\|u_0\|_{\mathfrak{B}_2}^4 + r_\varepsilon \int_0^T \|w - y\|_{\mathfrak{B}_2}^4 dt, \theta \in (0, 1), \end{aligned}$$

где параметр штрафа  $r_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

В результате вычислений было найдено решение задачи, которое представлено на рис. 1, при этом значение функционала  $J = 0.152053088$  (с точностью до  $10^{-8}$ ). В

ходе вычислительного эксперимента были получены вычислительные погрешности, позволяющие оценить приближения модельного решения к требуемому:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \|\tilde{w}(s, t) - w_d(s, t)\|_{L_4(0, T; \mathfrak{B}_2)}^4 = 0.09825, \\ \delta_2 &= \|\tilde{v}(s, t) - v_d(s, t)\|_{L_2(0, T; \mathfrak{B}_1)}^4 = 0.02456, \\ \delta_3 &= \|\tilde{y}(s, t) - w_d(s, t)\|_{L_4(0, T; \mathfrak{B}_2)}^4 = 0.02616.\end{aligned}$$

Данные оценки показывают, что искомые функции  $\tilde{w}(s, t)$ ,  $\tilde{v}(s, t)$ ,  $\tilde{y}(s, t)$  приближаются к заданным значениям в результате вычислительного эксперимента. Оценка дает основание сделать вывод, что предложенный нами метод декомпозиции является достаточно эффективным для нахождения приближенных решений задач стартового управления и финального наблюдения.

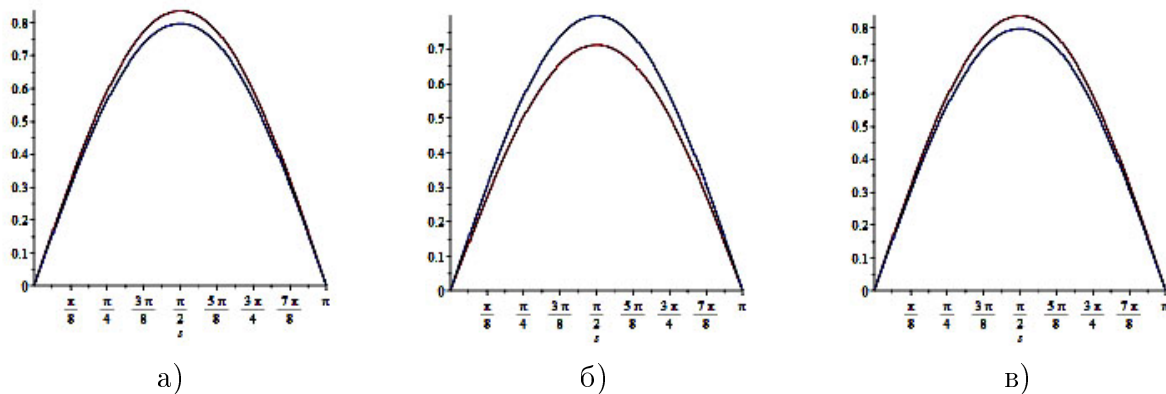


Рис. 1. а) Графики функций  $\tilde{v}(s, 0.5)$ ,  $\tilde{v}_d(s, 0.5)$  при  $t = 0.5$ ; б) Графики функций  $\tilde{w}(s, 0.5)$ ,  $\tilde{w}_d(s, 0.5)$  при  $t = 0.5$ ; в) Графики функций  $\tilde{y}(s, 0.5)$ ,  $\tilde{y}_d(s, 0.5)$  при  $t = 0.5$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20037, <https://rscf.ru/project/20-11-20037/>.

## Список литературы

1. Fitz Hugh R. Mathematical Models of Threshold Phenomena in the Nerve Membrane // Bulletin of Mathematical Biology. 1955. Vol. 17, No. 4. P. 257–278.
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon // Proceedings of the IRE. 1962. Vol. 50, No 10. P. 2061–2070.
3. Борина М.Ю., Полежаев А.А. Пространственно-временные структуры в многомерной активной среде, обусловленные многомодовым взаимодействием вблизи волновой бифуркации // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 6. С. 15–24.
4. Бокарева Т.А., Свиридчук Г.А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева // Математические заметки. 1994. Т. 55, № 3-4. С. 237–242.
5. Гаврилова О.В. Задача стартового управления и финального наблюдения для систему уравнений Фитц Хью-Нагумо с условием Дирихле-Шоултера-Сидорова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2018. Т. 10, № 3. С. 12–18.
6. Манакова Н.А. Метод декомпозиции в задаче оптимального управления для полулинейных моделей соболевского типа // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2015. Т. 8, № 2. С. 133–137.