УДК 517.977.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ КАК УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

С.О. Никаноров

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: nikanorovso@yandex.ru

Н.Г. Павлова

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН;
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65;

Россия, 392036, Тамбов, Интернациональная ул., 33

E-mail: natasharussia@mail.ru

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, модель Леонтьева, технологическое множество.

Аннотация: Исследуются топологические свойства технологического множества в открытой модели Леонтьева с непрерывным временем. В частности, получены необходимые условия замкнутости технологического множества. Балансовые соотношения рассматриваются как управляемая система с управлением – вектором конечного потребления. В исследуемой модели допускается возможность инвестирования, а именно: ресурсы, производимые одной отраслью, могут быть использованы для развития как этой отрасли, так и других. Для абстрактной постановки задачи это означает, что матрица прироста основных производственных фондов может быть недиагональной.

1. Введение

Рассматривается открытая динамическая модель «затраты–выпуск» В.В. Леонтьева с непрерывным временем, в которой в качестве управления выступает функция конечного потребления. Леонтьев разрабатывал эту модель (см. [1]) с 1924 года, став одним из основоположников теории межотраслевого баланса. Модели межотраслевого баланса, в частности модель Леонтьева, представляют собой таблицу, отражающую связь между объемами затрат на производство продукции в одной отрасли, и затратами, необходимыми для обеспечения этого производства в других отраслях. Расширенная модель Леонтьева (см. [2]) представляет собой систему линейных уравнений. Элементами матрицы этой системы являются объемы ресурсов, необходимые для производства условной единицы товара. В экономической системе производятся, реализуются, потребляются и инвестируются n типов ресурсов. При этом каждая отрасль производит только один уникальный тип продукта, то есть различные отрасли производят различные типы ресурсов. Замкнутость технологического множества позволяет понять, корректно ли смоделирован производственный процесс. Результаты данной статьи обобщают результаты, полученные в [2] на случай, когда матрица прироста основных производственных фондов не является диагональной.

2. Формализация задачи

Рассмотрим линейную управляемую систему

(1) $$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u,$$

с начальным условием

(2) $$x(0) = 0.$$

Здесь $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазового состояния системы, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $\tilde{a}_{ij} \geqslant 0$ – матрица размерности $n \times n$, $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$, $\tilde{b}_{ij} \in R$ – матрица той же размерности, что и A. $u = (u_1, ..., u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления. Всякую существенно ограниченную функцию $u(t),\ t \in [0, T]$ будем называть допустимой функцией непроизводственного потребления или допустимым управлением, для которой $u(t) \in K$ для п.в. t. Здесь K – заданный выпуклый конечнопорожденный конус

$$K = \Big\{ v \in \mathbb{R}^n : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \qquad \lambda_i \geqslant 0, v_i \in \mathbb{R}^n, \qquad i = \overline{1, k} \Big\},$$

$v_i \neq 0\ \forall i = \overline{1, k}$ – заданные векторы из $\mathbb{R}^n$.

Пусть D_T – множество достижимости в момент времени T, то есть множество всех точек фазового пространства $\mathbb{R}^n$, которые могут быть достигнуты в момент времени T из точки $x(0) = 0$ по решениям системы (1) при всех возможных управлениях $u(\cdot)$. $D_T = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x(T)\}$, здесь $x(\cdot)$ – решение (1), с начальным условием (2), $u(\cdot), u(t) \in K$. Определим матрицы $B_i = \tilde{A}^{i-1}\tilde{B}, i = \overline{1, n}$. Целью исследования является получение необходимых условий замкнутости технологического множества. Для этого воспользуемся теоремой, доказанной в [3].

Теорема 1. *(см. [3]) Пусть для любого $i \in \{1, 2, ..., k\}$ справедливо равенство*

$$rang\{B_1 v_i, B_2 v_i, ..., B_n v_i\} = n.$$

Тогда множество $D_T \setminus \{0\}$ является открытым.

Теорема 1 позволяет исследовать топологические свойства технологического множества, которое определяется по соответствующему множеству достижимости в динамической модели Леонтьева, рассматриваемой как управляемая система с управлением – функцией непроизводственного потребления.

3. Технологическое множество в динамической модели Леонтьева с непрерывным временем

Рассмотрим открытую динамическую модель Леонтьева с непрерывным временем, в которой учитывается инвестирование доходов отраслей (см. [4]).

$$x = \hat{A}x + \hat{B}\dot{x} + u, t \in [0, T], \tag{3}$$

$$x(0) = 0 \tag{4}$$

Под открытостью динамической модели будем понимать существование в экономической системе потребления товаров и услуг, которые не связаны с процессом производства. Другими словами, в модели существует вектор конечного потребления.

Здесь $x = (x_1, ..., x_n)^T$ – вектор валовых выпусков отраслей, $\hat{A}$ – матрица прямых затрат размерности $n \times n$, $\hat{B}$ – матрица прироста основных производственных фондов, той же размерности, $\dot{x}$ – прирост выпуска отраслей, $u = (u_1, ..., u_n)^T \in K$ – вектор управления.

Матрица $\hat{A} = (\hat{a}_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$ является продуктивной [5], то есть все элементы матрицы неотрицательные и для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n_+$ найдется такой вектор $w \in \mathbb{R}^n_+$, что $\hat{A}w + q = w$.

Матрица $\hat{B} = (\hat{b}_{ij}),\ \hat{b}_{ij} \geqslant 0,\ i = \overline{1, n}, \exists\ \hat{b}_{ij} \neq 0$ предполагается невырожденной. Соответственно, если обратить внимание на систему, описывающую модель Леонтьева, а именно на слагаемое $\hat{B}\dot{x}$, становится видно, что прирост выпуска отраслей экономики пропорционален величине капитала, вложенного в производство. Для получения необходимых условий замкнутости воспользуемся теоремой 1. Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Пусть множество P_T в динамической непрерывной модели Леонтьева (3), (4), в момент времени T является замкнутым, тогда*

$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^n, \qquad \alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2 = 0,$$

$$\exists i = \overline{1, n} : \alpha_1 B_1 v_i + \alpha_2 B_2 v_i + ... + \alpha_n B_n v_i = 0.$$

$$-\alpha_1 \begin{pmatrix} \hat{b}_{i_k 1} \\ \hat{b}_{i_k 2} \\ \vdots \\ \hat{b}_{i_k n} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \sum\limits_{\substack{i_k=1 \\ k=\overline{1,n+1}}}^{n} \hat{b}_{1i_1}\hat{a}_{i_1 i_2}\ldots\hat{b}_{i_k 1} & \ldots & \sum\limits_{\substack{i_k=1 \\ k=\overline{1,n+1}}}^{n} \hat{b}_{1i_1}\hat{a}_{i_1 i_2}\ldots\hat{b}_{i_k n} \\ \sum\limits_{\substack{i_k=1 \\ k=\overline{1,n+1}}}^{n} \hat{b}_{2i_1}\hat{a}_{i_1 i_2}\ldots\hat{b}_{i_k 1} & \ldots & \sum\limits_{\substack{i_k=1 \\ k=\overline{1,n+1}}}^{n} \hat{b}_{2i_1}\hat{a}_{i_1 i_2}\ldots\hat{b}_{i_k n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{\substack{i_k=1 \\ k=\overline{1,n+1}}}^{n} \hat{b}_{ni_1}\hat{a}_{i_1 i_2}\ldots\hat{b}_{i_k 1} & \ldots & \sum\limits_{\substack{i_k=1 \\ k=\overline{1,n+1}}}^{n} \hat{b}_{ni_1}\hat{a}_{i_1 i_2}\ldots\hat{b}_{i_k n} \end{pmatrix} + \tag{5}$$

$$+\sum_{l=\overline{3,n}}^{n}(-1)^l\alpha_l\begin{pmatrix}\sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,n+1}}}^{n}\hat b_{1i_1}\hat a_{i_1i_2}\dots\hat b_{i_k1} & \dots & \sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,n+1}}}^{n}\hat b_{1i_1}\hat a_{i_1i_2}\dots\hat b_{i_kn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,n+1}}}^{n}\hat b_{ni_1}\hat a_{i_1i_2}\dots\hat b_{i_k1} & \dots & \sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,n+1}}}^{n}\hat b_{ni_1}\hat a_{i_1i_2}\dots\hat b_{i_kn}\end{pmatrix}=0.$$

Для случаев $n=2$ и $n=3$ условия (5) принимают более простой вид.

Теорема 3. *(см. [6]) Пусть технологическое множество P_T в двухсекторной динамической модели Леонтьева (3), (4) является замкнутым. Тогда*

$$\left[\begin{array}{l}\hat b_{22}\hat a_{21}+\hat b_{21}(1-\hat a_{22})=0\\ \hat b_{11}\hat a_{12}+\hat b_{12}(1-\hat a_{11})=0.\end{array}\right.$$

Теорема 4. *Пусть множество P_T в динамической непрерывной модели Леонтьева (3),(4), в момент времени T является замкнутым, тогда*

$$\exists\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}^3,\qquad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\neq 0,$$

$$-\alpha_1\begin{pmatrix}\hat b_{i_i1}\\ \hat b_{i_i2}\\ \hat b_{i_i3}\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}\sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{1i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i} & \sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{1i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i} & \sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{1i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i}\\ \sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{2i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i} & \sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{2i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i} & \sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{2i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i}\\ \sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{3i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i} & \sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{3i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i} & \sum\limits_{i_1,i_2=1}^{3}\hat b_{3i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i}\end{pmatrix}-$$

$$-\alpha_3\begin{pmatrix}\sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,4}}}^{3}\hat b_{1i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i_3}\hat a_{i_3i_4}\hat b_{i_41} & \dots & \sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,4}}}^{3}\hat b_{1i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i_3}\hat a_{i_3i_4}\hat b_{i_4n}\\ \sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,4}}}^{3}\hat b_{2i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i_3}\hat a_{i_3i_4}\hat b_{i_41} & \dots & \sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,4}}}^{3}\hat b_{2i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i_3}\hat a_{i_3i_4}\hat b_{i_4n}\\ \sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,4}}}^{3}\hat b_{3i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i_3}\hat a_{i_3i_4}\hat b_{i_41} & \dots & \sum\limits_{\substack{i_k=1\\k=\overline{1,4}}}^{3}\hat b_{3i_1}\hat a_{i_1i_2}\hat b_{i_2i_3}\hat a_{i_3i_4}\hat b_{i_4n}\end{pmatrix}=0.$$

4. Заключение

Динамическая модель Леонтьева с непрерывным временем рассматривается как управляемая система, в которой существенно ограниченное управление принимает значения, равные вектору конечного потребления. Для этой модели получены условия корректности, а именно: необходимые условия замкнутости технологического множества. Для получения этого результата применяется теорема о топологических свойствах множества достижимости линейной управляемой системы, у которой множество значений управления представляет собой конечнопорожденный конус.

Теоремы 3, 4 получены Никаноровым С.О. при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/) в ИПУ РАН. Теорема 2 получена Павловой Н.Г. при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).

Список литературы

1. Леонтьев В. Спад и подъем советской экономической науки. Экономические эссе: Теории, исследования, факты и политика. М.: Политиздат, 1990. 218 с.
2. Pavlova N.G. Necessary conditions for closedness of the technology set in dynamical Leontief model // Eleventh International Conference “Management of large-scale system development” (MLSD). IEEE, 2018. P. 1–4.
3. Арутюнов А.В. , Павлова Н.Г. О топологических свойствах множества достижимости линейных систем // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1564–1566.
4. Nikanorov S.,Pavlova N. Study of the Continuous-Time Open Dynamic Leontief Model as a Control System // 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). IEEE, 2023. P. 1–5.
5. Hawkins D., Simon H.A. Some Conditions of Macroeconomic Stability // Econometrica. 1949. Vol. 17. P. 245.
6. Никаноров С.О., Павлова Н.Г., Динамическая модель Леонтьева с непрерывным временем как управляемая система // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD’2023): труды Шестнадцатой международной конференции. 26-28 сентября 2023 г., Москва. 2023. С. 299–306.