

# АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**С.Н. Стребуляев, Д.А. Сироткина, Сингх Дхананджай**

*Институт информационных технологий математики и механики Нижегородского  
государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

E-mail: sstrebuliaev@mail.ru

**Аннотация.** Проводится компьютерное исследование устойчивости электромеханической системы электропривода и расчет робастной устойчивости колебаний переднего колеса трехколесного шасси самолета. На первом этапе рассматривается типовая структурная схема системы электропривода. Получена передаточная функция системы, характеристическое уравнение, построены границы областей устойчивости в плоскостях различных параметров. При исследовании устойчивости явления шимми проведен анализ существующих теорий качений упругого пневматика. Приведенные в этих работах математические модели положены в основу разработанного программного обеспечения для расчета границ областей устойчивости и радиуса робастной устойчивости. Рассматривается также математическая модель динамической системы, описанной в работах Лоренца. В отличие от большинства теоретических работ, посвященных анализу хаоса, здесь приведены результаты компьютерного моделирования по схемам качественной теории динамических систем. Определяются состояния равновесия и приведены результаты многофакторного вычислительного эксперимента при изменении параметров с целью определения областей возникновения хаотических режимов.

## 1. Введение

В настоящее время при исследовании, в том числе и устойчивости, конкретных динамических систем получило широкое распространения методология математического моделирования и вычислительного эксперимента [1]. Эта методология охватывает многие сферы, от разработки комплексов технических систем и управления ими до анализа сложных технических, экономических, биологических и ряда других систем и процессов. Математическое моделирование развивается в недрах фундаментальных наук: механики и физики, которые отличают наивысший уровень теоретических исследований. При исследовании ряда новых процессов и систем необходимо построение адекватных математических моделей и проведение расчетов на ЭВМ, то есть проведение поискового вычислительного эксперимента. Вопрос об адекватности математической модели является очень важным, требующем высокой квалификации исследователей. Анализ адекватности математической модели реальному изучаемому объекту или процессу должен включаться в алгоритм и разрабатываемое программное обеспечение. Динамика роста вычислительных возможностей современных компьютеров достаточно высока и позволяет надеяться на успешное решение все более сложных задач.

## 2. Анализ конкретных систем

**Робастная устойчивость электропривода.** Из анализа структурных схем

электроприводов была получена обобщенная схема исследуемой динамической системы. Ввиду сложности и громоздкости символьных преобразований, связанных с получением уравнений движения, характеристических уравнений и получением областей устойчивости было принято решение об использовании системы аналитических вычислений (САВ) Maple. Были получены аналитические выражения главной передаточной функции и характеристического уравнение вида:

$$(1) \quad Q_6(p) = q_0 p^6 + q_1 p^5 + q_2 p^4 + q_3 p^3 + q_4 p^2 + q_5 p + q_6 = 0$$

где

$$q_0 = T_5 b_2 d_3 T_2 T_4;$$

$$q_1 = T_5 b_2 d_3 T_4 + T_5 b_1 d_3 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_2 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_3 T_2;$$

$$q_2 = C_e C_m T_3 b_2 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_2 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_1 T_2 T_4 + T_5 b_2 d_3 + T_5 b_2 d_2 T_2 + T_5 b_1 d_3 T_4 + T_5 b_2 d_2 T_4;$$

$$q_3 = C_e C_m T_3 b_1 d_3 T_2 + T_5 b_1 d_2 T_4 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 T_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 C_2 b_2 + T_5 b_2 d_1 T_4 + T_5 b_1 d_2 T_2 + T_5 b_2 d_1 T_2 + T_5 b_2 d_2 + T_5 b_1 d_3 + C_e C_m T_3 b_2 d_3 + T_5 b_1 d_1 T_2 T_4;$$

$$q_4 = C_e C_m T_3 b_1 d_2 T_2 + C_e C_m T_3 b_1 d_3 + T_5 b_1 d_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 + K_2 C_m T_1 T_3 a_2 c_2 + T_5 b_1 d_1 T_4 + T_5 b_1 d_1 T_2 +$$

$$C_e C_m T_3 b_2 d_1 T_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 C_1 b_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 C_2 b_1 + T_5 b_2 d_1;$$

$$q_5 = C_e C_m T_3 b_2 d_1 + K_2 C_m T_1 T_3 a_1 c_2 + T_5 b_1 d_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_1 T_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 C_1 b_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_2 + K_2 C_m T_1 T_3 a_2 c_1;$$

$$q_6 = C_m K_2 T_1 T_3 a_1 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_1;$$

В дальнейшем, с помощью разработанного программного обеспечения, был проведен многофакторный вычислительный эксперимент по анализу границ областей устойчивости (с использованием режима анимации) в плоскостях различных параметров рассматриваемой динамической системы (рис 1).

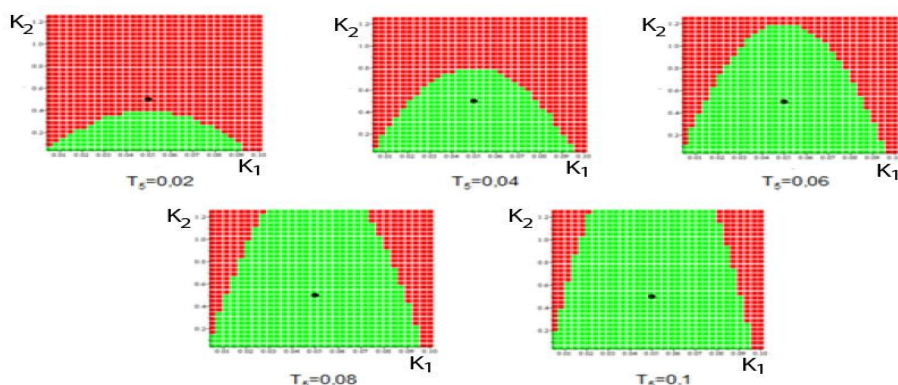


Рис. 1 Границы областей устойчивости в плоскости параметров  $(K_1, K_2)$  для разных значений  $T_5$ .

**Колебания передней стопы самолета (шимми).** Для расчета устойчивости переднего колеса трехколесного шасси самолета были рассмотрены результаты теоретических исследований ряда Российских ученых: Келдыша М.В., Гоздека В.С., Неймарка Ю.И., Фуфаева Н.А., Журавлева В.Ф., Климова Д.М. и других. В настоящей работе используется математическая модель, приведенная в работе [2].

Подставляя выражения для потенциальной, кинетической энергии и функции рассеивания, согласно [2], в уравнение Лагранжа получаем следующие уравнения движения (2), с учетом неголономных связей (3)

$$\begin{cases} A\ddot{\varphi} + [k + \rho N + IN(\sigma - 1)]\dot{\psi} + D\dot{\theta} + C\omega\theta - cN\theta - (Ia + \sigma N)\xi = 0 \\ D\ddot{\psi} - C\omega\dot{\psi} - cN(\sigma - 1)\dot{\psi} + B\dot{\theta} + h\theta - ca\xi - \beta\varphi = 0 \\ \psi + c\theta + \xi + V\theta + V\varphi = 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha V\xi + \beta V\varphi - \gamma V\psi = 0 \end{cases},$$

В дальнейшем в полученном характеристическом уравнении проводился переход от размерных параметров к безразмерным  $r_i$  и построение границ областей устойчивости в каждой паре плоскостей этих параметров. В каждой плоскости параметров определялся минимальный радиус окружности с центром в некотором номинальном значении параметров, таким образом, чтобы все точки внутри этой окружности лежали в области устойчивости. Наименьший из полученных радиусов и объявлялся радиусом робастной устойчивости (рис. 2).

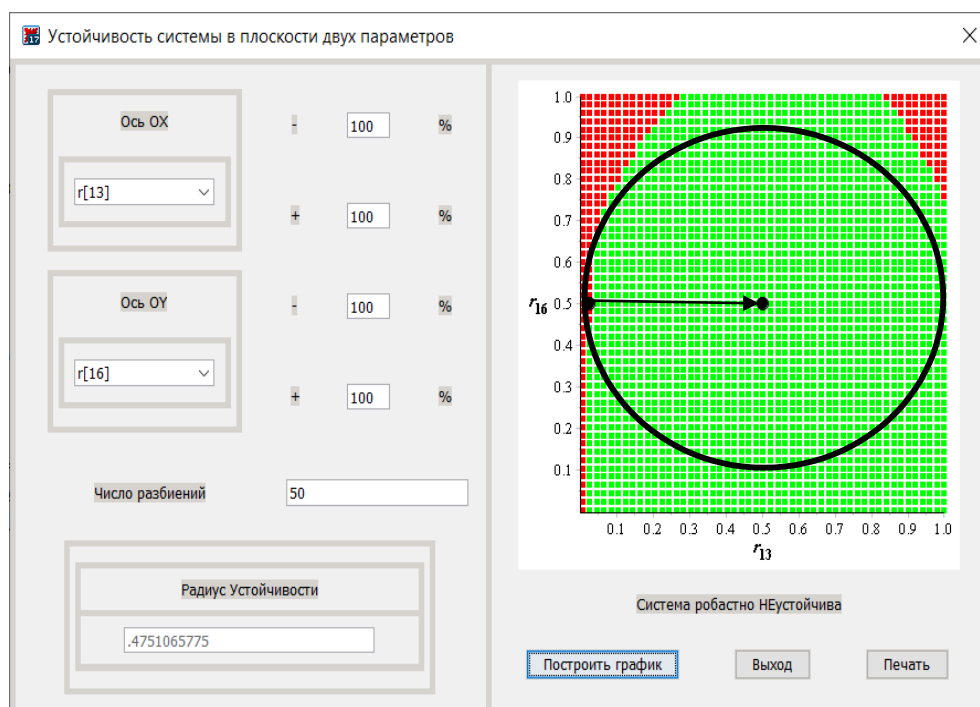


Рис. 2. Интерфейс разработанного программного обеспечения.

**Хаотические режимы в модели Лоренца.** На следующем этапе рассматривается общеизвестная модель Лоренца [3], в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

В дальнейшем определяются состояния равновесия в количестве трех (при  $r > 1$ ) и одном (при  $r < 1$ ). На базе этих зависимостей создано универсальное программное обеспечение. Основными этапами расчетов являются: вычисление состояний равновесия, построение интегральных кривых и фазового портрета относительно каждого из состояний равновесия и построение глобальной структуры фазового пространства (рис. 3). Также реализован алгоритм, позволяющий при изменении трех параметров системы, определять наличие или отсутствие хаоса (рис.4). В процессе компьютерного моделирования используются возможности САВ Maple в области численного решения систем нелинейных дифференциальных с визуализацией результатов расчетов и виде графиков в режиме анимации.

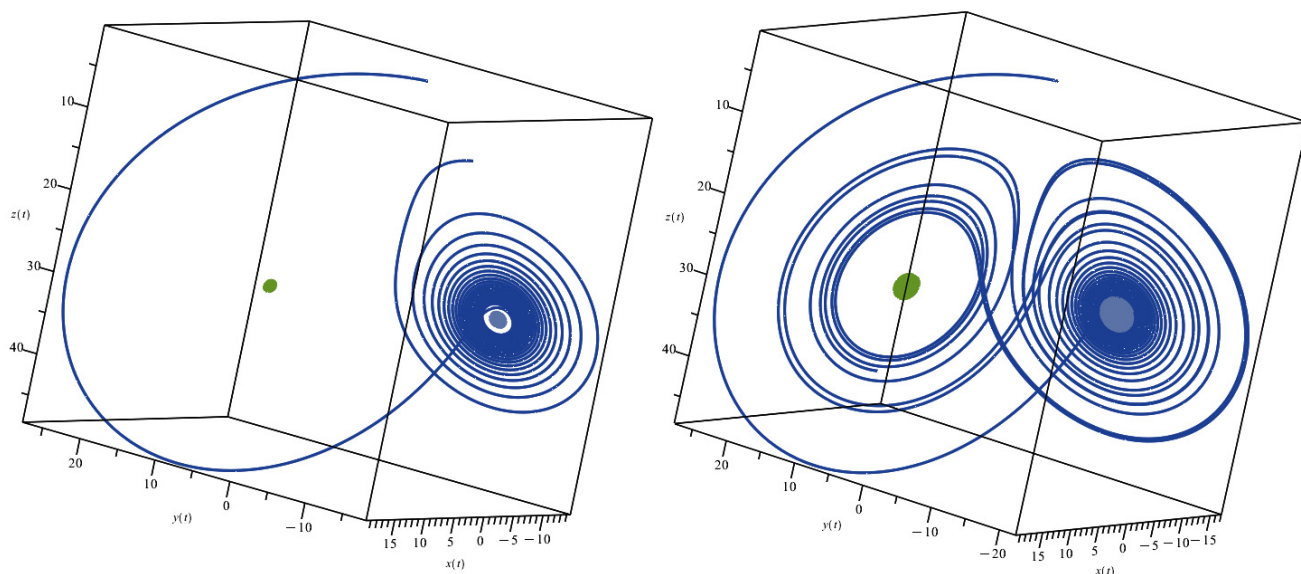


Рис. 3. Глобальная структура фазового пространства.

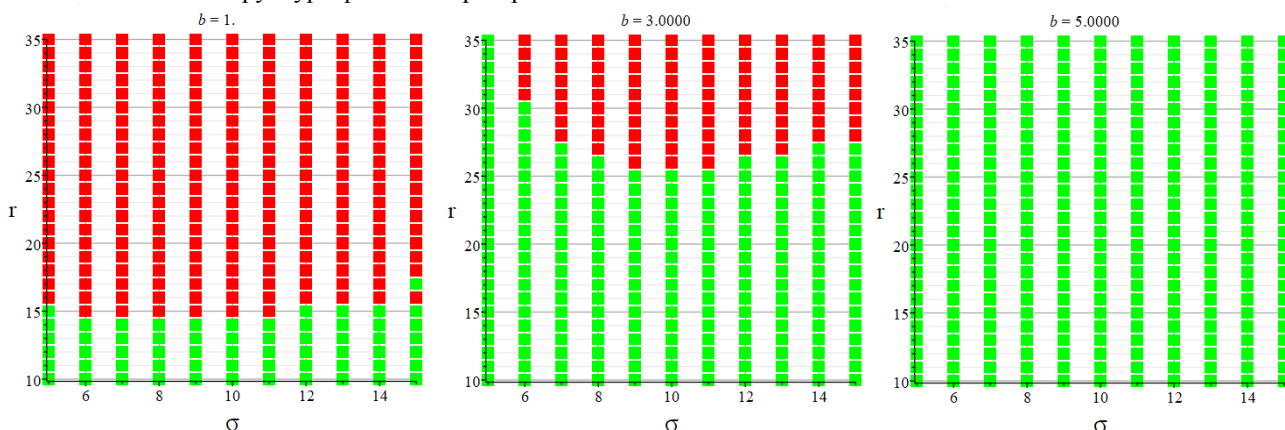


Рис. 4. Области наличия и отсутствия хаоса при изменении параметров  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $b$ .

### 3. Заключение

В рассмотренной работе приведены результаты математического моделирования и расчета характеристик устойчивости колебаний в технических системах – системе электропривода и шимми переднего колеса трехколесного шасси самолета. Рассмотрение указанных систем проводилось в полной мере с учетом всех их характеристик без каких-либо упрощений. Использование САВ Maple для достижения результатов исследования показало эффективность этого программного обеспечения. С использованием теоретического материала и адекватных математических моделей, приведенных в работах известных Российских ученых, в сочетании с появившимися возможностями вычислительной техники и программного обеспечения удалось получить новые научные результаты.

#### Список литературы

1. Стребуляев С.Н., Сироткина Д.А. Учебно-исследовательские проекты по анализу динамического качества технических систем и процессов с использованием их математических моделей //

- Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 2. С. 392-403
2. Неймарк Ю.И, Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967.
  3. Кузнецов С.П Динамический хаос. М.: 2001.