УДК 517.977.58

К ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ СКОЛЬЗЯЩИХ УПРАВЛЕНИЙ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Н.Н. Субботина
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620108, Россия, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16
E-mail: subb@uran.ru

Е.А. Крупенников
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
620108, Россия, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16
E-mail: krupennikov@imm.uran.ru

Ключевые слова: реконструкция управлений, скользящие управления, слабая со звездой сходимость, невыпуклые ограничения.

Аннотация: В докладе рассматривается задача реконструкции управления в механической системе по дискретным неточным замерам наблюдаемой траектории. Рассматривается случай наблюдаемой траектории, порожденной скользящим режимом. Вводится корректная постановка задача реконструкции управления и аппроксимации решения в слабой со звездой топологии пространства, сопряженного к пространству непрерывных функций. Предлагается метод построения таких аппроксимаций по результатам наблюдения за реализуемой траекторией. Приведен пример численного решения поставленной задачи.

1. Введение

Доклад посвящен задаче реконструкции управлений для механических аффинно-управляемых систем на основании неточных дискретных замеров реализуемой траектории. Рассматривается случай невыпуклых ограничений на управления. В таким случае наблюдаемая траектория может оказаться результатом воздействия на систему скользящего управления [1]. Для математического моделирования процессов со скользящими режимами используется теория обобщенных управлений [2, 3]. Задача реконструкции обобщенного управления, порождающего наблюдаемую траекторию, некорректна. Предлагается определение нормального управления, позволяющее выделить единственное искомое управление.

Известен ряд методов решения задачи реконструкции управлений при выпуклых ограничениях на управления. Например, подход [4], базирующийся на процедуре оптимального прицеливания [6]. Подход позволяет строить L^2-аппроксимации нормального управления. Но при невыпуклых ограничениях невозможно гарантировать существование аппроксимирующих допустимых управлений, удовлетворяющих заданным невыпуклым ограничениям, и сходящихся к нормальному управлению в L^2. Поэтому для постановки задачи реконструкции управлений с невыпуклыми ограничениями нельзя требовать сходимость аппроксимаций решения в L^2. Доказано, что для таких задач сходимость аппроксимаций можно понимать в смысле слабой со звездой топологии пространства, сопряженного к пространству непрерывных функций.

Предлагается метод построения слабых со звездой аппроксимаций решения для задачи реконструкции нормального управления с невыпуклыми ограничениями. Показаны результаты численного эксперимента.

2. Задача реконструкции управлений

2.1. Входные данные задачи

Рассматриваются аффинно-управляемые системы вида

$$\begin{gathered}\ddot{x}(t) = G(t, x(t), \dot{x}(t))u(t) + f(t, x(t), \dot{x}(t)),\\ x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty.\end{gathered} \tag{1}$$

Функции $G(t, x, \dot{x})$, $f(t, x, \dot{x})$ липшицевы по совокупности переменных. Допустимые управления – измеримые функции, удовлетворяющие ограничениям

$$u(t) \in \mathbf{U} \text{ п. в. на } [0, T], \tag{2}$$

где $\mathbf{U} \subset R^m$, вообще говоря, невыпуклый компакт. Такие ограничения могу привести к возникновению скользящих режимов в управлениях [1].

Известен набор неточных дискретных замеров некоторой реализованной наблюдаемой (т. н. базовой) траектории $x^*(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ системы (1). Абсолютная погрешность замеров – $\delta > 0$, шаг замеров – $h^\delta > 0$. Предполагается, что $h^\delta \overset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$. Общая постановка задачи реконструкции управлений состоит в следующем: восстановить управление, порождающее базовую траекторию.

2.2. Обобщенные управления

Воздействие на динамику (1) скользящих управлений описывается с помощью введения обобщенных управлений – измеримых по t функций

$$t \longrightarrow \mu_t(du) : [0, T] \to rpm(\mathbf{U}) \tag{3}$$

и обобщенной динамики

$$\ddot{x}(t) = \int\limits_{\mathbf{U}} G(t, x(t), \dot{x})u\, \mu_t(du) + f(t, x(t), \dot{x}). \tag{4}$$

Подробно теория обобщенных решений описана, например, в [2, 3].

2.3. Нормальное управление

В первую очередь необходимо выделить единственное нормальное управление, порождающее базовую траекторию, чтобы регуляризовать задачу реконструкции. Каждому обобщенному управлению $\mu_t(du)$ поставим в соответствие измеримую функцию $v(\cdot) : [0,T] \to \operatorname{co}\mathbf{U}$, которую назовем усредненным управлением:

$$t \to v(t) = \int\limits_{\mathbf{U}} u\,\mu_t(du).$$

Усредненное управление эквивалентно по воздействию любому обобщенному, которому оно отвечает. В силу этого свойства предлагается отождествлять каждое усредненное управление с множеством эквивалентных ему обобщенных.

Значения усредненных управлений принадлежат выпуклому множеству $\operatorname{co}\mathbf{U}$. Поэтому предложенное отождествление сводит обобщенную динамику (4) с обобщенными управлениями (3) к обычной динамике (1) с усредненными (т. е. «обычными» измеримыми) управлениями, но с овыпукленными геометрическими ограничениями

$$(5) \qquad u(t) \in \operatorname{co}\mathbf{U} \text{ п. в. на } [0,T]$$

вместо невыпуклых ограничений (2).

Для динамики (1) с выпуклыми ограничениями (5) для каждой траектории найдется [7] единственное измеримое управление $u^*(\cdot) : [0,T] \to \operatorname{co}\mathbf{U}$, порождающее её и имеющее минимальную L^2-норму. Будем называть его нормальным управлением. Заметим, что для случая выпуклого множества $\mathbf{U}$ такое определение нормального управления эквивалентно классическому (допустимое управление, порождающее базовую траекторию и имеющее минимальную L^2-норму).

2.4. Сходимость аппроксимаций решения

Доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Множество функций* $\{u(\cdot) \in L^1([0,T],R^m) : u(t) \in \operatorname{co}\mathbf{U})$ п. в. на $[0,T]\}$ *является замыканием множества* $\{u(\cdot) \in L^1([0,T],R^m) : u(t) \in \mathbf{U})$ п. в. на $[0,T]$ *в слабой со звездой топологии пространства* $C^*([0,T],R^m)$.

Из этой теоремы следует, что для нормального управления всегда можно построить сходящуюся к нему слабо со звездой последовательность измеримых функций, удовлетворяющих ограничениям (2).

3. Решение задачи реконструкции управлений

Предлагаемый подход к решению задачи 1)–3) для динамики с невыпуклыми ограничениями (1), (2) опирается на уже существующие методы решения задачи реконструкции управлений для случая когда $\mathbf{U}$ выпуклое. А именно, предполагается, что известен алгоритм, позволяющий строить вспомогательные кусочно-постоянные аппроксимации нормального управления, сходящиеся хотя бы в слабом со звездой смысле.

Такие алгоритмы могут базироваться, например, на методах, описанных в [5] или на методе решения задачи реконструкции управлений, разработанном авторами доклада [8, 9]. Этот метод базируется на использовании решений гамильтоновых систем дифференциальных уравнений из вспомогательных задач вариационного исчисления на поиск стационарных точек функционалов, интегранты которых являются d.c.-функциями.

Несмотря на то, что в работах [8, 9] рассматриваются системы, описанные дифференциальными уравнениями первого порядка, в работе [10] показано, что подход применим и к механическим системам второго порядка вида (1) при добавлении дополнительного условия согласования параметров δ и h^{δ}.

В работе [9] приводится подробное построение и доказательство сходимости аппроксимаций для случая когда $\mathbf{U}$ – вершины m-мерного прямоугольника.

В докладе предлагается обобщение этого подхода на случай произвольного невыпуклого множества $\mathbf{U}$.

4. Пример

В качестве примера рассмотрим модель трехмассовой системы на пружинных подвесах:

$$m_1\ddot{x}_1(t) = -(x_1(t) - x_3(t))k_1(t) + (x_2(t) - x_1(t))k_2(t) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \tag{6}$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) = -(x_2(t) - x_1(t))k_2(t) - b_2(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)), \tag{7}$$

$$m_3\ddot{x}_3(t) = (x_1(t) - x_3(t))k_1(t) - x_3(t)k_3(t) + b_1(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)) - \dot{b}_3x_3, \tag{8}$$

$$m_1 = 2,\ m_2 = 4,\ m_3 = 10,\ b_1 = 0.1,\ b_2 = 0.2,\ b_3 = 0.3,\ t \in [0, 10]. \tag{9}$$

Фазовые переменные $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ – это отклонения масс от положения статического равновесия. Параметры b_1, b_2, b_3 – коэффициенты вязкого трения упругих связей. Роль управления $u(t) = (k_1(t), k_2(t), k_3(t))$ играют коэффициенты жесткости пружин, которые считаются переменными. Ограничения на управления представляют собой невыпуклое двухточечное множество:

$$k_1, k_2, k_3 \in \{0; 5\}. \tag{10}$$

В качестве базовой траектории взята траектория, порожденная скользящим управлением, эквивалентным усредненному управлению

$$k_1(t) = 5, \quad k_2(t) = 2.5(1 + \sin(t)), \quad k3(t) = \left\{ \begin{array}{l} 5,\ t \in [0, 0.5T) \\ 0,\ t \in [0.5T, T] \end{array} \right. .$$

Первая формула моделирует пружину с постоянной жесткостью, вторая – подвес с управляемой жесткостью, третья – обрыв пружины с постоянной жесткостью.

На основании численно построенной базовой траектории эмулированы точки замеров с погрешностью $\delta = 0.01$ и шагом 0.2 (всего 50 шагов). На основании этих данных произведено построение кусочно-постоянных аппроксимаций нормального управления, удовлетворяющих заданным невыпуклым ограничениям (10). Графики аппроксимаций управлений показаны на рис. 1. Графики траекторий системы (6), порождаемых этими аппроксимациями, показаны на рис. 2.

Рис. 1. Аппроксимация нормального управления. Синий цвет – нормальное управление. Красный – его аппроксимация.

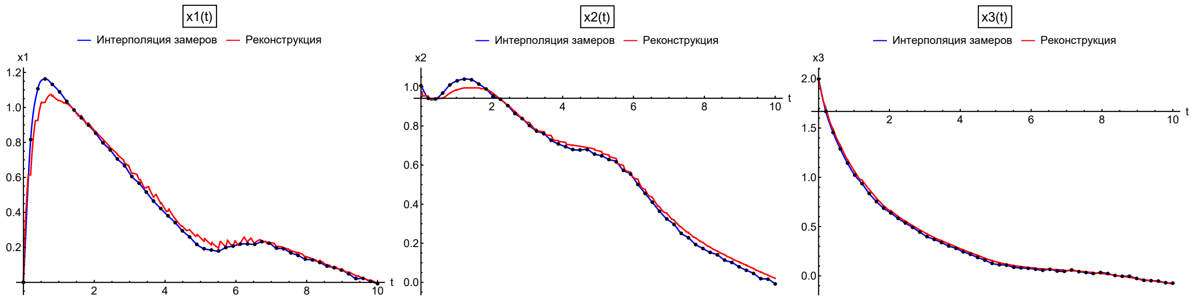

Рис. 2. Восстановленные траектории. Синий цвет – интерполяция замеров. Красный – траектория, порождаемая аппроксимирующим управлением.

5. Заключение

В докладе представлена корректная постановка задачи реконструкции управлений для механических аффинно-управляемых систем по неточным дискретным замерам реализуемой траектории для случая, когда при невыпуклых ограничениями на управления возникают скользящие режимы. Предложен метод решения этой задачи. Приводится численный пример решения.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2024-1377).

Список литературы

1. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.
2. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1975. 230 с.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями: Пер. с англ. М.: Наука, 1977. 624 с.
4. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51—60.
5. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129—161.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
8. Субботина Н.Н, Крупенников Е.А. Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Тр. Математического Инст. Им. В.А. Стеклова. 2021. Т. 315. С. 247–260.
9. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. To the dynamic reconstruction problem with non-convex geometrical restrictions on the controls // Commun. Optim. Theory. 2022. № 18. 22 p.
10. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. On Inverse Problems for Mechanical Systems // Materials of 20th International Conference "Aviation and Cosmonautics". Springer Nature, 2024. (в печати)