УДК 517.977.58

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАИМЕНЬШЕГО ВРЕМЕНИ ПЕРЕХВАТА ДВИЖУЩЕЙСЯ ЦЕЛИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

М.Э. Бузиков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: me.buzikov@physics.msu.ru

А.М. Майер
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: mayer@ipu.ru

Ключевые слова: линейная система, множество достижимости, принцип максимума, изотропная ракета.

Аннотация: В настоящей работе исследована задача наискорейшего перевода состояния линейной системы с постоянными коэффициентами на заданное множество, изменяющееся известным образом в зависимости от времени. Предложена удобная параметризация границы множества достижимости линейной системы с постоянными коэффициентами. Для задачи наискорейшего перевода линейной системы в заданное состояние предложен алгоритм вычисления времени быстродействия на основе вычисления оценок расстояния от множества достижимости до заданного состояния. Для иллюстрации работы алгоритма была рассмотрена задача перемещения изотропной ракеты в заданное состояние, меняющееся во времени.

1. Введение

Задача наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом, относится к классу задач оптимального управления с не фиксированным временем окончания и меняющимся во времени терминальным условием. Для разработки эффективных алгоритмов перехвата предписано движущейся цели необходимо исследовать множество достижимости управляемой системы.

Случай линейной управляемой системы для рассматриваемой задачи активно изучался ранее. В работе [1] Л.В. Нейштадтом было получено дифференциальное уравнение, решение которого определяет начальное значение для сопряженного вектора, отвечающего оптимальному решению. Опираясь на эту работу, Дж. Итон в статье [2] описал итерационный алгоритм, суть которого состоит в построении монотонной последовательности времен, которые оценивают снизу оптимальное значение времени быстродействия. Эта последовательность должна сходиться к времени быстродействия. Промежуточным действием на каждом шаге этого алгоритма осуществляется поворот гиперплоскости, которая отделяет множество достижимости от целевого состояния. Цель этого поворота состоит в том, чтобы временной шаг, определяющий следующий элемент последовательности времен, был положительным. Алгоритм Итона подразумевает использование практически трудно вычисляемой функции, поэтому для конструктивности он заменяет ее вычисление на другую итеративную процедуру, математическое обоснование которой не приводится в работе. В.Г. Болтянский исследовал подобную задачу и предложил алгоритм, отличающийся от алгоритма Итона [3]. В основе этого алгоритма лежит исследование разностного уравнения, полученного на основе уравнения Нейштадта.

Основной проблемой использования описанных алгоритмов является необходимость подсчета точки опоры для заданного опорного вектора на поверхности множества достижимости. В общем случае это можно сделать только после численного интегрирования уравнений движения с заданным экстремальным управлением, параметризованным опорным вектором. Поэтому, в общем случае, каждый такой подсчет является достаточно тяжеловесной операцией. Для конкретных линейных систем можно обойтись и без численного интегрирования, если необходимые конструкции будут получены аналитически. Одной из таких систем является модель, известная под названием «изотропная ракета» [4, 5].

2. Постановка задачи

Пусть состояние некоторой системы в момент времени $t \in \mathbb{R}_0^+$ описывается с помощью вектора-столбца $\boldsymbol{s}(t;\boldsymbol{u}) \in \mathcal{S}$, где через $\boldsymbol{u}$ обозначена вектор-функция управления, а через $\mathcal{S}$ – пространство состояний (конечномерное нормированное евклидово пространство). Пусть динамика системы описывается линейным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\boldsymbol{s}} = \mathbf{A}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{s}(0;\boldsymbol{u}) = \mathrm{s}_0. \tag{1}$$

На управление наложено ограничение $\boldsymbol{u}(t) \in \mathcal{U}$, где множество допустимых значений $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ является компактом. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех измеримых управлений, принимающих значения только из множества $\mathcal{U}$.

Обозначим через $\mathcal{H}$ линейное подпространство $\mathcal{S}$, которое состоит из координат важных при перехвате цели. Фазовую траекторию движения цели будем описывать с помощью функции $\boldsymbol{h}_T \in \mathrm{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$ (v-липщицева функция). Важные при перехвате компоненты вектора состояния системы (1) будем обозначать через $\boldsymbol{h}(t;\boldsymbol{u}) = \mathrm{Pr}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{s}(t;\boldsymbol{u}))$, при этом $\mathbf{h}_0 = \boldsymbol{h}(0;\boldsymbol{u})$. Также будем предполагать, что для любых $\boldsymbol{u} \in \mathcal{A}$ и $t \in \mathbb{R}_0^+$ выполняется неравенство $\|\mathrm{Pr}_{\mathcal{H}}(\mathbf{A}\boldsymbol{s}(t;\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}(t))\| \leqslant v_{\max} \in \mathbb{R}^+$. Задача наискорейшего перехвата цели, движущейся известным образом, является задачей на быстродействие с функционалом

$$J[\boldsymbol{u};\boldsymbol{h}_T] \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{t \in \mathbb{R}_0^+ : \|\boldsymbol{h}(t;\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{h}_T(t)\| \leqslant \ell\right\} \to \inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}}.$$

Здесь $\ell \in \mathbb{R}_0^+$ играет роль радиуса захвата. Целью настоящей работы является построение алгоритма вычисления величины $T^*[\boldsymbol{h}_T] = \inf_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}} J[\boldsymbol{u};\boldsymbol{h}_T]$.

3. Множество достижимости

Обозначим через $\mathcal{R}(t)$ множество всех точек в пространстве важных для перехвата координат $\mathcal{H}$, в которых может оказаться система в момент времени $t \in \mathbb{R}_0^+$, используя только допустимые управления $\boldsymbol{u} \in \mathcal{A}$: $\mathcal{R}(t) \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{h}(t;\boldsymbol{u}) :\ \boldsymbol{u} \in \mathcal{A}\}$. Прежде всего отметим, что согласно теореме 1 из [6, стр. 69], множество $\mathcal{R}(t)$ в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}_0^+$ является компактным и выпуклым, а многозначное отображение $\mathcal{R}$ непрерывно.

Для линейных систем функции управления, удовлетворяющие принципу максимума, порождают траектории, концы которых лежат на границе множества достижимости, причем для каждой точки этой границы существует управление, удовлетворяющее принципу максимума, которое приводит в эту точку [6, стр. 73, теорема 2].

Обозначим через $\boldsymbol{p}(t;T,\mathbf{p}) \in \mathcal{S}^*$ вектор сопряженной системы. Здесь $\boldsymbol{p}(T;T,\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. Сопряженная к (1) система уравнений имеет вид: $\dot{\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{p}\mathbf{A}$. Решение этой системы можно записать так:

$$\boldsymbol{p}(t;T,\mathbf{p}) = \mathbf{p}e^{(T-t)A}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{u}_E(\cdot;T,\mathbf{p}) \in \mathcal{A}$ экстремальные управления, удовлетворяющие почти всюду принципу максимума:

$$\boldsymbol{p}(t;T,\mathbf{p})\boldsymbol{u}_E(t;T,\mathbf{p}) \overset{\text{a.e.}}{=} \max_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \boldsymbol{p}(t;T,\mathbf{p})\mathbf{u},$$

Здесь правая часть по определению является опорной функцией множества $\mathcal{U}$.

Для попадания на границу множества достижимости достаточно использовать управления, заданные с помощью

$$\boldsymbol{u}_E(t;T,\mathbf{p}) \overset{\text{def}}{=} \arg\max_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \boldsymbol{p}(t;T,\mathbf{p})\mathbf{u}, \tag{2}$$

Для всех $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^*$ заданные управления ведут на границу множества достижимости. Определение (2) корректно при выполнении условий нормальности системы: почти всюду не возникает неоднозначности в определении аргумента максимума.

Перейдем к процессу получения описания траекторий, ведущих на границу множества достижимости. Используя формулу Коши с экстремальными управлениями вида (2), приходим к следующим выражениям:

$$\boldsymbol{s}_E(t;T,\mathbf{p}) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{s}(t;\boldsymbol{u}_E(\cdot;T,\mathbf{p})) = e^{At}\boldsymbol{s}_0 + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}\boldsymbol{u}_E(\tau;T,\mathbf{p})\mathrm{d}\tau.$$

Введем следующее обозначение:

$$\boldsymbol{h}_E(t;\mathbf{p}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Pr}_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{s}_E(t;t,\mathbf{p})), \quad \mathrm{Pr}_{\mathcal{H}}(\mathbf{p}^\top) = \mathbf{0}.$$

Граница проекции множества достижимости $\partial\mathcal{R}(T)$ на подпространство $\mathcal{H}$ состоит из концевых точек экстремальных траекторий, поэтому явное выражение для этой поверхности задается с помощью $\partial\mathcal{R}(t) = \{\boldsymbol{h}_E(t;\mathbf{p}) :\ \mathbf{p} \in \mathcal{S}^*,\ \|\mathbf{p}\| = 1,\ \mathrm{Pr}_{\mathcal{H}}(\mathbf{p}^\top) = \mathbf{0}\}$.

4. Вычисление наименьшего времени перехвата

Теперь опишем итерационный алгоритм, позволяющий находить приближенные значения наименьшего времени перехвата $T^*[\boldsymbol{h}_T]$ и вектора $\mathbf{p}$, который полностью определяет программу оптимального управления.

Алгоритм 1 Вычисление приближенного значения $T^*[\boldsymbol{h}_T]$

Input: $v \in \mathbb{R}_0^+$, $\boldsymbol{h}_T \in \mathrm{Lip}_v(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H})$, $v_{\max} \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{h}_0 \in \mathcal{H}$, $\ell \in \mathbb{R}_0^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\alpha : (0,1] \to (0,1)$

Require: $\|\boldsymbol{h}_T(0) - \mathbf{h}_0\| > \ell$; $K_n = \alpha(K_{n-1})$, $K_0 = 1$, $K_n < K_{n-1}$, $K_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$t \leftarrow 0$, $\rho_{\text{lower}} \leftarrow \ell$, $\mathbf{p} \leftarrow \frac{(\boldsymbol{h}_T(0)-\mathbf{h}_0)^\top}{\|\boldsymbol{h}_T(0)-\mathbf{h}_0\|}$
do
    $t \leftarrow t + \frac{\rho_{\text{lower}}-\ell}{v_{\max}+v}$
    do
        $K \leftarrow 1$
        do
            $\tilde{\mathbf{p}} \leftarrow (1-K)\mathbf{p} + K\frac{(\boldsymbol{h}_T(t)-\boldsymbol{h}_E(t;\mathbf{p}))^\top}{\|\boldsymbol{h}_T(t)-\boldsymbol{h}_E(t;\mathbf{p})\|}$
            $K \leftarrow \alpha(K)$
        while $\|\boldsymbol{h}_T(t) - \boldsymbol{h}_E(t;\mathbf{p})\| < \|\boldsymbol{h}_T(t) - \boldsymbol{h}_E(t;\tilde{\mathbf{p}})\|$
        $\mathbf{p} \leftarrow \tilde{\mathbf{p}}/\|\tilde{\mathbf{p}}\|$
        $\rho_{\text{upper}} \leftarrow \|\boldsymbol{h}_T(t) - \boldsymbol{h}_E(t;\mathbf{p})\|$, $\rho_{\text{lower}} \leftarrow \mathbf{p}(\boldsymbol{h}_T(t) - \boldsymbol{h}_E(t;\mathbf{p}))$
    while $\rho_{\text{upper}} - \rho_{\text{lower}} > \rho_{\text{lower}} - \ell$
while $\rho_{\text{upper}} > \ell(1+\varepsilon)$

Output: t, $\mathbf{p}$

Утверждение 1. *Для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ алгоритм 1 останавливается за конечное количество итераций, причем при $\varepsilon \to 0$ значение $t \to T^*[\boldsymbol{h}_T]$.*

5. Пример работы алгоритма

Рассмотрим пример перехвата изотропной ракетой [7]. Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{H} = \mathbb{R}^4$ и

$$\boldsymbol{s}(t;\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{h}(t;\boldsymbol{u}), \quad \mathbf{s}_0 = \mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \quad v_0 \in [0,1),$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 & u^1 & u^2 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4 : (u^1)^2 + (u^2)^2 \leqslant 1\}.$$

Можно показать, что $v_{\max} = \sqrt{5}$.

Пусть траектория цели следующая: $\boldsymbol{h}_T(t) = \begin{bmatrix} 1+\cos\frac{t}{2} & \sin\frac{t}{2} & -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} \end{bmatrix}^\top$. Такая траектория принадлежит классу $\mathrm{Lip}_{\sqrt{5}/4}(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^4)$, поэтому далее $v = \sqrt{5}/4$. Аналитическое выражение для $\boldsymbol{h}_E(t;\mathbf{p})$ описано в [7]. Шаги внешнего цикла алгоритма 1 изображены на рис. 1.

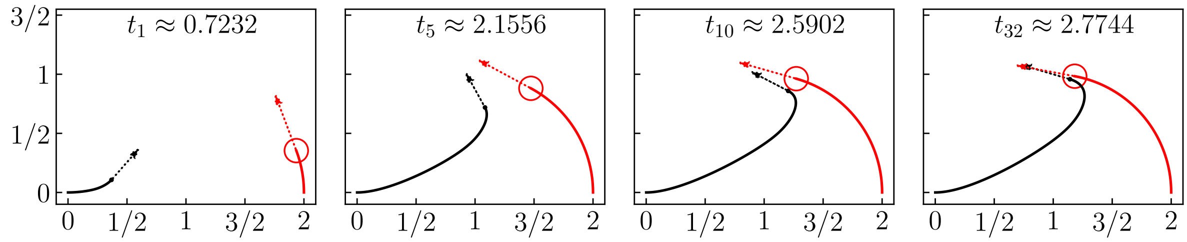

Рис. 1. Шаги внешнего цикла алгоритма 1 для начальной скорости ракеты $v_0 = 1/2$ и $\varepsilon = 1/100$. Красная окружность является границей проекции области захвата с $\ell = 1/10$ на плоскость движения. Ракета движется вдоль черной линии, а цель – вдоль красной

6. Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм для вычисления наименьшего времени перехвата движущейся цели для класса линейных систем с постоянными коэффициентами. Параметризация поверхности множества достижимости с помощью опорного вектора к заданному выпуклому множеству достижимости позволяет эффективно оценивать наименьшее время перехвата, если есть возможность в явном виде за малое время вычислять точку опоры для заданного опорного вектора. Одной из линейных систем, для которых есть такая возможность, является изотропная ракета. К перспективам данного исследования относится математическое обоснование сформулированного утверждения о сходимости предложенного алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 23-19-00134).

Список литературы

1. Neustadt L.W. Synthesizing Time Optimal Control Systems // J Math Anal Appl. 1960. Vol. 1, No. 3. P. 484–492.
2. Eaton J. H. An iterative solution to time-optimal control // J Math Anal Appl. 1962. Vol. 5, No. 2 P. 329–344.
3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 С.
4. Акуленко Л.Д. Наискорейшее приведение к требуемому фазовому состоянию объекта, движущегося в вязкой среде // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 5. С. 763–770.
5. Bakolas E. Optimal guidance of the isotropic rocket in the presence of wind // J Optim Th Appl. 2014. Vol. 162, No. 3. P. 329–344.
6. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 С.
7. Buzikov M.E., Mayer A.M. Minimum-time interception of a moving target by an isotropic rocket // ArXiv preprint. Thu, 9 Nov 2023. arXiv:2311.05264v1.