УДК 517.977.1

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА ПРОЦЕССНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

И.А. Суров
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49А
E-mail: ilya.a.surov@itmo.ru

Ключевые слова: процесс, прогнозирование, жизненный цикл, матрица, фаза.

Аннотация: В докладе описан математический метод процессного моделирования на принципах естественного мышления. Метод основан на представлении функциональной структуры процесса в виде жизненного цикла, обобщающего цикл управления классической кибернетики на процессы любой природы. Это представление формализовано в виде фазовой траектории на комплексной плоскости, оси которой соответствуют семантическим факторам «активность» и «потенциал». В результате процессные состояния и переходы между ними кодируются векторами и матрицами комплекснозначных амплитуд. Полученная модель позволяет прогнозировать динамику процессов и событийных факторов на основе стандартных операций линейной алгебры. Представленный метод открывает возможности для создания метрологически-обеспеченных моделей семантического управления сложными системами.

1. Введение

Управление биологическими, техническими, социальными, экологическими системами всегда представляет собой процесс – информационно-логическую структуру, которая описывает видоизменение объекта в преемственности последовательных состояний. Такие структуры обычно изображаются в стрелочно-блочных обозначениях, соответствующих определенным состояниям объекта и переходам между ними под действием субъектов управления. Такие графические модели позволяют наглядно представить содержание процессов управления без строгого математического выражения. Математические модели управления, напротив, обычно описывают динамику отдельных переменных, упуская из виду качественную, смысловую сторону дела. Эта ограниченность графических моделей с одной стороны и математических моделей с другой стороны обуславливает их разобщенность, снижающую качество управления сложными системами. В докладе представлен подход к решению этой проблемы на основе общей модели процессов (раздел 2.1.) и ее формализации на комплексной плоскости (раздел 2.2.), открывающих возможность процессного моделирования на основе матричной алгебры (раздел 3.).

2. Общая модель процесса

2.1. Функциональная траектория процесса

В естественном мышлении процессы моделируются на основе простейшего прототипа, доступного в естественной среде – суточного и годового циклов. Характерные фазы этих процессов (времена суток и года) по своим функциям аналогичны фазам любого процесса, всегда имеющего начало (завязку, постановку задачи), середину (развитие, действие) и конец (итог, результат). При этом за окончанием наступает начало следующего цикла с той же структурой и новым содержанием. В результате модель процесса имеет кольцевую структуру, установленную в моделях жизненного цикла систем и деятельностей в различных предметных областях [1, 2]. Такая модель субъект-объектного взаимодействия, в частности, соответствует циклу управления в классической кибернетике как показано на рис. 1А.

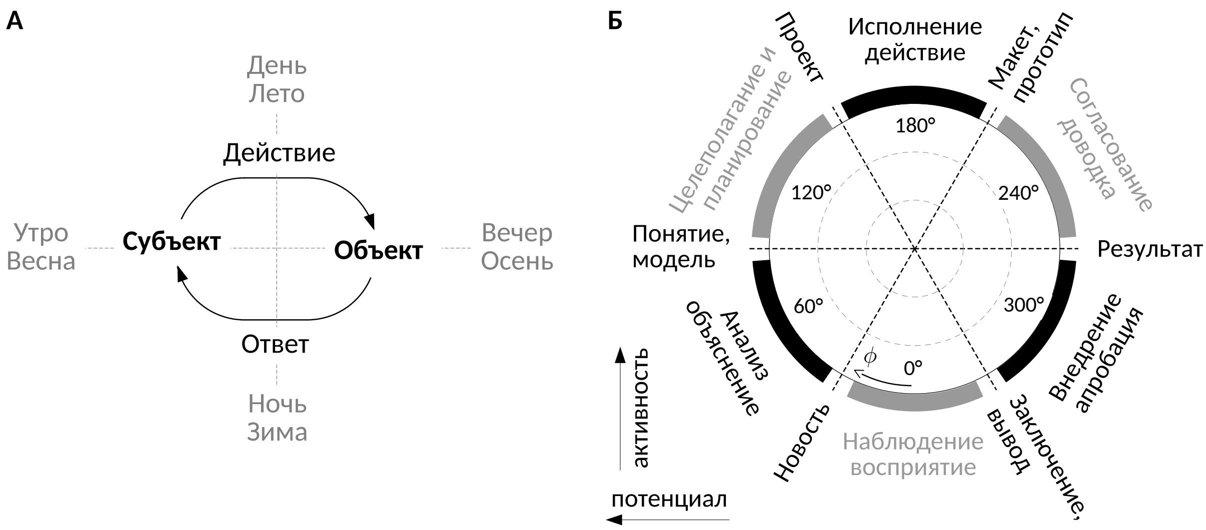

Рис. 1. Общая модель процесса. А: структура суточно-годовых циклов в наложении на кибернетический цикл управления. Б: шестиэтапная модель [1]

На рис. 1Б представлена более развернутая шестиэтапная версия этой модели, которую можно рассмотреть, например, для процесса научного исследования. Этот процесс начинается ($\phi = 0°$) с *восприятия* субъектом окружающей среды, которое заканчивается различением *нового*, не замеченного ранее факта ($\phi = 30°$). Далее следует этап его *объяснения* в существующей понятийной системе, заканчивающийся построением *модели* этого факта ($\phi = 90°$). В рамках этого понимания субъектом далее ставится *цель*, например, более полного изучения обнаруженных явлений, и разрабатывается *проект* исследования ($\phi = 150°$). Исполнение этого плана заканчивается получением предварительного результата – *прототипа* ($\phi = 210°$), который далее оформляется и доводится до конечного вида ($\phi = 270°$). Публикация и *внедрение* полученного результата в практику заканчивается *выводом* о проделанной работе ($\phi = 330°$). Далее процесс возвращается в исходную фазу *восприятия* ($\phi \approx 360° = 0°$), завершая исследовательский цикл.

2.2. Декартовы оси и комплексная плоскость

Плоскость, на которой расположена траектория процесса на рис. 1Б, образована факторами *потенциал* и *активность* Ч. Осгуда [1], соответствующими горизонтальной и вертикальной осям. Активность различает энергичное действие (наружу) и пассивное восприятие (внутрь), тогда как потенциал (субъектность, сила) различает субъекта и объекта. Это свойство дает представленной модели процесса метрологическое обеспечение, отсутствующее у стрелочно-блочных схем (EPC, BPMN и т.п.), аналогичных показанной на рис. 1А.

В процессе гармонического колебания плоскость потенциал – активность соответствует плоскости координата – импульс, на которой движение маятника представляется круговой фазовой траекторией. Комплекснозначная запись этого движения используется для математической формализации процессов любой природы [3]. При этом действительная ось X и мнимая ось Y описывают фактическое и ожидаемое состояния системы как показано на рис. 2.

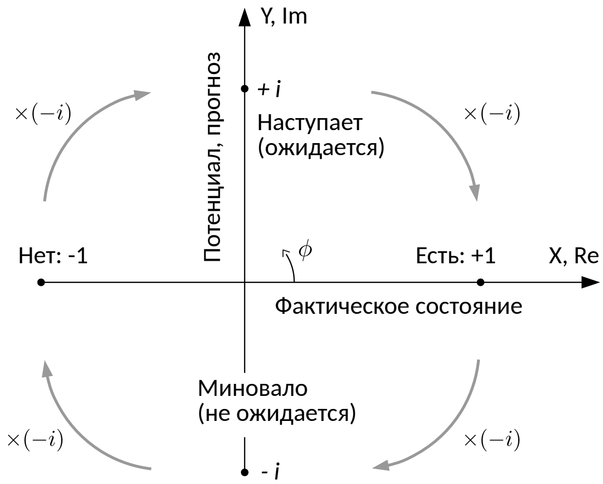

Рис. 2. Четырехэтапная структура процесса на комплексной плоскости

Точки ± 1 на рис. 2 кодируют состояния базисной сущности процесса «результат есть» и «результата нет», соответствующих объекту и субъекту на рис. 1А. Точки $\pm i$ кодируют состояния «результат ожидается» и «результат не ожидается (миновал)», соответствующие действию и восприятию. Переходы между этими состояниями по часовой стрелке осуществляются умножением комплексного числа на константу $-i$.

3. Прогнозное моделирование

Представленная интерпретация комплексных чисел сопрягается с квантовоподобными моделями принятия решений, в которых когнитивно-психологические состояния поведенческих систем кодируются комплекснозначными векторами [4]

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{K} c_k \, |k\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_K \end{bmatrix}, \tag{1}$$

в которых комплекснозначные амплитуды c_k описывают процессные состояния K ортогональных событий / факторов $|k\rangle$ согласно представленной интерпретации.

В моделях квантовой когнитивистики матрица плотности состояния (1)

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} |c_1|^2 & c_1c_2^* & \dots & c_1c_K^* \\ c_2c_1^* & |c_2|^2 & \dots & c_2c_K^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_Kc_1^* & c_Kc_2^* & \dots & |c_K|^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

представляет собой алгоритмику рассматриваемой поведенческой системы, определяющей ее отклик на всевозможные события в том же гильбертовом пространстве [5]. Если такое событие-вопрос кодируется вектором $|V\rangle$, то событие-ответ $|A\rangle$ определяется действием на него оператора (2) как

$$|A\rangle = \hat{\rho}\,|V\rangle\,. \tag{3}$$

Представленная интерпретация амплитуд позволяет использовать это состояние в качестве прогнозного вектора следующим образом.

Пусть в качестве вопроса $|V\rangle$ осуществилось первое базисное событие $|1\rangle$. Компоненты вектора-ответа (3)

$$\hat{\rho}\,|1\rangle = \begin{bmatrix} |c_1|^2 \\ c_2c_1^* \\ \vdots \\ c_Kc_1^* \end{bmatrix} \tag{4}$$

тогда описывают переходы от вопросного события «1» к каждому из К базисных факторов / событий:

- Если фаза амплитуды c_2 события «2» больше фазы амплитуды c_1 вопросного события «1» на некоторую величину Δ, то фаза соответствующей прогнозной амплитуды $c_2c_1^*$ равна этой разнице:

  $$\arg[c_2c_1^*] = \arg[c_2] - \arg[c_1] = \Delta. \tag{5}$$

  Согласно рис. 2 при $\Delta = 90^\circ$ это значит, что событие «2» находится в состоянии «наступает (ожидается)».

- Если, напротив, фаза амплитуды c_2 события «2» меньше фазы амплитуды c_1 вопросного события «1», то разность (5) меньше нуля и событие «2» соответственно прогнозируется как прошедшее и не ожидающееся.

- Если же фазы амплитуд c_1 и c_2 совпадают, то разность (5) равна нулю. Согласно рис. 2 это значит, что событие ответное событие «2» реализовалось синхронно с вопросным событием «1». Модуль амплитуды $c_2c_1^*$ во всех случаях кодирует достоверность прогноза.

Остальные элементы прогнозного вектора (4) и матрицы (2)

$$c_nc_m^* = \langle n|\,\hat{\rho}\,|m\rangle \tag{6}$$

также являются амплитудами перехода от вопросного события «m» к ответному событию «n» и интерпретируются сходным образом. Особую специфику имеют разве что диагональные компоненты $|c_n|^2$, соответствующие совпадению вопросного и ответного событий. Эта действительная величина равна вероятности осуществления события «n» из исходного когнитивно-психологического состояния (1) согласно квантово-теоретическому правилу Борна.

Помимо базисных векторов $|k\rangle$ вопросным событием $|V\rangle$ может быть их суперпозиция с амплитудами v_k, аналогичная состоянию (1). В этом случае согласно правилу (3) компонеты ответного вектора образуются суммами элементов (6), взвешенных с соответствующими амплитудами v_k. Полученные таким образом комплексные величины, также как и вопросные амплитуды v_k, интерпретируются согласно той же схеме на рис. 2.

В классическом пределе недиагональные элементы матрицы (2) равны нулю, тогда как вопросные вектора ограничены фиксированным набором базисных событий. В этом случае ответный вектор (3) равен вопросному вектору $|k\rangle$, умноженному на диагональный элемент прогнозной матрицы $|c_k|^2$. Этот предел таким образом соответствует классической, то есть абсолютно детерминированной поведенческой системе: отклик такой системы на любое событие не порождает новой информации, т.е. по существу совпадает с заданным вопросом $|k\rangle$.

4. Заключение

Количественное описание процессов управления требует математического аппарата, соответствующая решаемым задачам. В докладе показано, что такой математикой является линейная алгебра комплекснозначных векторных пространств, во многом совпадающая с матричной формулировкой квантовой теории. Эта математическая форма соответствует представлению процессов в естественном мышлении, что открывает новые возможности для разработки природоподобных моделей и систем управления.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01046, https://rscf.ru/project/23-71-01046/.

Список литературы

1. Суров И.А. Жизненный цикл: смысловая матрица процессного моделирования // Онтология проектирования. 2022. Т. 12, № 4. С. 430–453.
2. Суров И.А. Процессная онтология и квантование информации. Новосибирск: Знания–Онтологии–Теории, 2023.
3. Суров И.А. Процессная семантика комплексных чисел // Математические структуры и моделирование. 2023. Т. 68, № 4.
4. Суров И.А., Алоджанц А.П. Модели принятия решений в квантовой когнитивистике. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2018. 63 с.
5. Суров И.А. Квантовая теория: методология и математика управления // Труды XIII Всероссийского Совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. С. 1589–1593.