УДК 517.95, 517.97

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НА МЕЛКОЙ ВОДЕ

А.А. Замышляева
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, Ленина пр., 76
E-mail: zamyshliaevaaa@susu.ru

Е.В. Бычков
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, Ленина пр., 76
E-mail: bychkovev@susu.ru

Ключевые слова: задача оптимального управления, численное исследование, модифицированное уравнение Буссинеска, полулинейное уравнение соболевского типа второго порядка.

Аннотация: Для минимизации амплитуды волн на мелкой воде. Поставлена задача оптимального управления решениями начально-краевой задачи для IMBq уравнения. На основе теоремы о существовании и единственности решения неоднородного уравнения доказана теорема о существовании оптимального управления в модели распространения волн на мелкой воде. Решение формально представляется в виде галеркинской суммы и затем, на основе априорных оценок, доказывается сходимость галеркинских приближений в *-слабом смысле. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T \in \mathbb{R}_+$. В цилиндре $\Omega \times (0,T)$ рассмотрим неоднородное модифицированное уравнение Буссинеска

$$(1) \qquad (\lambda - \Delta)x_{tt} - \alpha^2\Delta x - \Delta(x^3) = u(s,t), \quad (s,t) \in \Omega \times (0,T)$$

с однородным краевым условием Дирихле

$$(2) \qquad x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

где $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

Уравнение (1) моделирует распространение волн на мелкой воде с учетом капиллярных эффектов, $x = x(s,t)$ определяет высоту волны. В [1] исследована (модифицированная) математическая модель распространения волн на мелкой воде в одномерной области и получено солитонное решение уравнения (1). В [2] доказано существование единственного глобального решения задачи Коши для уравнения

(1), при $\lambda = 1, \alpha = 1$. В [3] с помощью уравнения (1) исследуется взаимодействие ударных волн. При некоторых значениях параметров и начальных данных (формы и скорости) амплитуда волн неограниченно возрастает (как в вырожденном, так и невырожденном случае), или другими словами решение разрушается [4].

Для минимизации амплитуды волн и предотвращения разрушения решения поставим задачу оптимального управления. Введем пространство управлений $\mathfrak{U}$ в нем выделим непустое, замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$, которое назовем множеством допустимых управлений. Поставим задачу оптимального управления как условие минимизации функционала

$$J(x, u) \to \inf, u \in \mathfrak{U}_{ad}. \tag{3}$$

Конкретный вид функционала будет определен позже.

Задача оптимального управления позволяет балансировать между близостью к желаемому состоянию и объмом трудо и энерго затрат. В моделях соболевского типа задача оптимального управления впервые была рассмотрена в работе [5]. Для полулинейных моделей соболевского типа первого порядка задача оптимального управления была исследована в работах [6, 7]. Задачи оптимального управления колебательными явлениями возникают в таких технических задачах как задачи об успокоении качки судна, стрелы подъемного крана, об организации виброзащиты и другие. Важность решения задач оптимального управления колебательными процессами уже неоднократно отмечалась в работах [8–11].

Во всех перечисленных выше работах существенным условием является непрерывная обратимость оператора при старшей производной по переменной t. Однако, оператор $\lambda - \Delta$ может быть вырожденным. Используя теорию относительно спектрально ограниченных операторов, разработанную Г.А. Свиридюком и его учениками [12, 13], в ранее было показано, что в подходящим образом выбранных пространствах задачу (1)–(2) можно редуцировать к абстрактному полулинейному уравнению соболевского типа второго порядка [14]

$$L\ddot{x} + Mx + N(x) = u. \tag{4}$$

В настоящей работе исследуется задача оптимального управления решениями задачи Коши

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \tag{5}$$

и решениями задачи Шоуолтера – Сидорова [15]

$$P(x(0) - x_0) = 0, \quad P(\dot{x}(0) - x_1) = 0 \tag{6}$$

для уравнения (4). Здесь P – некоторый спектральный проектор вдоль ядра оператора L.

2. Задача оптимального управления

Пусть $H = (H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное, сепарабельное, гильбертово пространство. Зададим дуальные пары рефлексивных банаховых $(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ и (L^p, L^q) относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ такие, что имеет место цепочка плотных и непрерывных вложений

$$L^p \hookrightarrow \mathfrak{X} \hookrightarrow H \hookrightarrow \mathfrak{X}^* \hookrightarrow L^q.$$

В заданных пространствах определим операторы L, M, N удовлетворяющие условиям:
(C1) $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^*)$ – самосопряженный, неотрицательно определенный, фредгольмов;
(C2) $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^*)$ – самосопряженный, неотрицательно определенный;
(C3) $N \in C^r(L^p, L^q), r \geqslant 1$ – s-монотонный, p-коэрцитивный и однородный оператор порядка $p-1$, с симметричной производной Фреше.

В силу условия **(C3)**, оператор N удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}\langle N(x), x\rangle = (p-1)\langle N(x), \dot{x}\rangle.$$

Кроме того, зададим пространства распределений $L^\infty(0,T;\mathfrak{X}\cap L^p)$ и $L^\infty(0,T;\mathrm{coim}L)$, $\mathfrak{X} = \ker L \oplus \mathrm{coim}L$. Сопряженные им пространства строятся по теореме Данфорда – Петтиса $L^\infty(0,T;\mathfrak{X}\cap L^p))^* \simeq L^1(0,T;\mathfrak{X}^*\cup L^q)$ и $(L^\infty(0,T;\mathrm{coim}L))^* \simeq L^1(0,T;\mathfrak{X}^*)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления (3), (4). Для этого построим пространство $\mathfrak{U} = L^2(0,T;L^q)$ и определим в нем непустое замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Построим пространство $\mathfrak{X}_1 = \{x | x \in L^\infty(0,T;\mathfrak{X}\cap L^p), \dot{x} \in L^\infty(0,T;\mathrm{coim}L\cap\mathfrak{X})$.

Пару $(\tilde{x},\tilde{u}) \in \mathfrak{X}_1\times\mathfrak{U}_{ad}$ назовем *решением задачи оптимального управления*, если

$$J(\tilde{x},\tilde{u}) = \inf_{(x,u)} J(x,u),$$

где пары $(x,u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют задаче (4), (5). Функцию $\tilde{u}$ назовем *оптимальным управлением.*

Допустимым элементом задачи (3), (4), (5) назовем пару $(x,u) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{U}_{ad}$, удовлетворяющую задаче (4), (5) для которой $J(x,u) < +\infty$. Поскольку множество $\mathfrak{U}_{ad} \neq \varnothing$, то для любого $u \in \mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ в силу [16, Теорема 2.1] существует единственное решение $x = x(u)$ задачи (4), (5).

Теорема 1. [16] Пусть выполнены условия **(C1), (C2), (C3)**. Тогда при любых $(x_0,x_1) \in T\mathfrak{P}$, $T \in \mathbb{R}_+$, существует решение задачи (3), (4), (5).

Теорема 2. [16] При любых $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}$, $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение задачи оптимального управления (3), (4), (6).

3. Вычислительные эксперименты

Приведем результаты обработки информации по разработанному алгоритму, который был реализован в среде Maple. Обработка информации осуществлялась на основе вычислительных экспериментов.

Пусть $\Omega = [0,\pi]$, $\lambda = -1, \alpha = 2$. Для численного решения задачи используем метод декомпозиции, линеаризуем уравнение (1)

$$\begin{aligned}&(1-\Delta)x_{tt}(s,t) - 4\Delta x(s,t) - \Delta(y^3(s,t)) = u(s,t),\\&y(s,t) = x(s,t)\end{aligned}$$

и модифицируем функционал штрафа, следующим образом, символом $'$ обозначена производная по переменной s.

$$J(x,u)=\beta\theta\int_0^T(\|x(s,t)-z(s,t)\|^4_{L^4}+\|x'(s,t)-z'(s,t)\|^2_{L^2})dt+$$
$$+\beta(1-\theta)\int_0^T(\|y(s,t)-z(s,t)\|^4_{L^4}+\|y'(s,t)-z'(s,t)\|^2_{L^2})dt+$$
$$+(1-\beta)\int_0^T\|u(t)\|^2_{\mathfrak{Y}}dt+r\int_0^T(\|y(s,t)-x(s,t)\|^4_{L^4}+\|y'(s,t)-x'(s,t)\|^2_{L^2})dt.$$

Решение задачи (1), (2), (6) будем искать виде разложения в галеркинскую сумму [17] до второго слагаемого по собственным функциям задачи (2) для оператора Лапласа

$$x(s,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}a_k(t)\sin(ks),\ y(s,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}b_k(t)\sin(ks),\ u(s,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}c_k(t)\sin(ks).$$

Коэффициенты галеркинских сумм для вспомогательной функции и функции управления согласно методу Ритца представляются в виде многочленов

$$b_k(t)=\sum_{j=0}^{2}b_{kj}t^j,\quad c_k(t)=\sum_{j=0}^{2}c_{kj}t^j,\quad k=1,2.$$

Необходимо учитывать, что

$$b_{k0}=a_k(0),\quad b_{k1}=\frac{da_k}{dt}(0),\quad k=1,2.$$

Отметим что уравнение вырожденое. Для того чтобы выполнялось условие $(\mathbb{I}-Q)u$ *не зависит от* t, $\forall t\in(0,T)$, положим $c_{11}=0, c_{12}=0$. Тогда функция управления примет вид $u(s,t)=\frac{2}{\pi}(c_{10}\sin(s)+c_2(t)\sin(2s))$. Фазовое многообразие уравнения (1) имеет вид

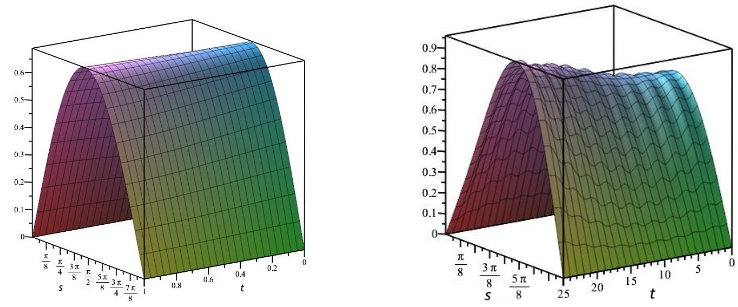
$$\mathfrak{P}=\left\{4a_1(t)+\left\langle\left(\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{2}b_k(t)\sin(ks)\right)^3,\sin s\right\rangle=c_{10}\right\}$$

Зададим параметры $\theta=\beta=0,5$, а параметр r как можно более большим, чтобы решение $x(s,t)$ и вспомогательная функция $y(s,t)$ были достаточно близки, для примера положим $r=100$.

Используя метод ветвей и границ, находим значения минимума функционала и точку минимума.

С использованием разработанного метода, информация обработана и найдены минимальное значение функционала для промежутка времени $[0,1]$ $J_{min}=16.728$, а для промежутка времени $[0,25]$ $J_{min}=2511.045$. В обоих случаях найдено приближенное решение задачи оптимального управление, т.е. пара функций: оптимальное управление и состояние системы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20037, https://rscf.ru/project/20-11-20037/.



a) b)

Рис. 1. График функции $x(s,t)$: a) при $t \in [0,1]$; б) при $t \in [0,25]$

Список литературы

1. Wang Y. On Properties of Solutions to the Improved Modified Boussinesq Equation // Journal of Nonlinear Science and Applications. 2016. Vol. 9, No. 12. P. 6004–6020.
2. Runzhang Xu, Yacheng Liu. Global Existence and Blow-up of Solutions for Generalized Pochhammer–Chree equations // Acta Mathematica Scientia. 2010. Vol. 30, No. 5. P. 1793—1807.
3. Архипов Д.Г., Хабахпашев Г.А. Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 93, № 8. С. 469–472.
4. Корпусов М.О., Овсянников Е.А. Локальная разрешимость, разрушение и гельдеровская регулярность решений некоторых задач коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 10. С. 1639–1661.
5. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control for a Class of Degenerate Linear Equations. Doklady Akademii nauk. 1999. Vol. 364, No. 3. P. 323–325.
6. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. An Optimal Control Problem for the Hoff Equation // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2007. Vol. 1, No. 2. P. 247–253.
7. Perevozvikova K.V., Manakova N.A. Research of the Optimal Control Problem for One Mathematical Model of the Sobolev Type // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2021. Vol. 14, No. 4. P. 36–45.
8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
9. Бутковский А.Г. Управление системами с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1979. № 11. С. 16–65.
10. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975.
11. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976.
12. Sviridyuk G.A. On the Solvability of a Nonstationary Problem Describing the Dynamics of an Incompressible Viscoelastic Fluid // Mathematical Notes. 1998. Vol. 63, No. 3. P. 388–395.
13. Свиридюк Г.А. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 2. С. 250–258.
14. Sviridyuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. The Phase Spaces of a Class of Linear Higher-Order Sobolev Type Equations // Differential Equations. 2006. Vol. 42, No. 2. P. 269–278.
15. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2010. Т. 3, № 1. С. 104–125.
16. Zamyshlyaeva A.A., Bychkov E.V. Optimal Control of Solutions to the Cauchy Problem for an Incomplete Semilinear Sobolev Type Equation of the Second Order // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2023. Vol. 10, No. 3. P. 24–37.
17. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.