УДК 355:656.052:621.391.17:004.891

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЦЕНОК МЕТОДОМ СЕТОК ПРИ ЗАВИСИМОСТИ АПРИОРНОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ОТ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

А.В. Шолохов
Автономная некоммерческая организация «Институт инженерной физики»
Россия, 142210, Серпухов, Большой Ударный пер., 1А
E-mail: sholav@mail.ru

С.Б. Беркович
Автономная некоммерческая организация «Институт инженерной физики»
Россия, 142210, Серпухов, Большой Ударный пер., 1А
E-mail: naviserp5@iifmail.ru

Н.И. Котов
Автономная некоммерческая организация «Институт инженерной физики»
Россия, 142210, Серпухов, Большой Ударный пер., 1А
E-mail: naviserp5@iifmail.ru

Ключевые слова: нелинейное оценивание параметров, метод сеток, корреляция весов.

Аннотация: Предложено новое решение задачи оценивания, в которой неизвестные параметры связаны нелинейно с доступными измерениями. Искомая оценка формируется согласно методу сеток как взвешенная сумма частных оценок, получаемых при вероятных значениях неизвестных параметров. Особенностью решения является дополнительный учет ковариации весовых коэффициентов и частных оценок. В отличие от известных подходов априорные вероятности указанных значений не предполагаются в составе исходных данных. Подход может быть эффективен при решении нелинейных задач оценивания, характеризующихся низкой точностью и (или) малым числом доступных измерительных данных.

1. Введение

Решения задач оценивания, в которых неизвестные параметры нелинейно связаны с измерениями, могут быть получены многими методами [1-4]. В них искомые оценки параметров определяют путем взвешенного суммирования частных оценок. Весовые коэффициенты сумм находятся посредством альтернативных моделей, формируемых с использованием вероятных значений неизвестных параметров.

Обоснование априорных значений неизвестных параметров и их вероятностей встречает трудности при решении некоторых прикладных задач, в которых число доступных измерений невелико и (или) они характеризуются низкой точностью [5, 6]. Обычно все возможные значения неизвестного параметра (или сочетания параметров, если их несколько) считаются априорно равновероятными. В этих условиях даже большое отклонение возможного значения неизвестного параметра от «истинного» не приводит к снижению соответствующей апостериорной вероятности вопреки физическому смыслу задачи. Как следствие, затруднено обоснование выбора границ области допустимых значений параметров, что является источником методических ошибок в получаемых оценках.

В связи с этим предлагается оригинальный подход к решению такого рода задач, не требующий априорных вероятностей искомых параметров. Границы областей допустимых значений неизвестных параметров по-прежнему предполагаются в составе исходных данных задачи оценивания, однако требования к их обоснованности могут быть существенно снижены. Это возможно на основе учета коррелированности частных оценок и их весовых коэффициентов, которые в рассматриваемом подходе считаются случайными величинами, зависящими от измерений. В случае сильной коррелированности частных оценок, они могут не приниматься в расчет практически без потерь в точности конечных оценок искомых параметров. Приведенные ниже постановка и решение задачи оценивания максимально упрощены. В решении задачи выделено два этапа, и рассмотрены условия их реализации.

2. Постановка задачи оценивания

Оптимальную в среднеквадратичном смысле оценку вектора $x = [x_1 \dots x_m]^T$ необходимо найти по доступным измерениям вектора y,

(1) $$y = Hx + v,$$

где H – известная матрица наблюдения соответствующей размерности, v – вектор погрешностей измерений с известной ковариационной матрицей R_v. Априорная матрица ковариации P_x искомого вектора x зависит от неизвестного вектора θ, который назовем вспомогательным параметром. Векторы x и v будем полагать взаимно независимыми гауссовыми и центрированными, но в общем случае θ может рассматриваться как аргумент ковариационной матрицы вектора, составленного из элементов векторов x, v.

В рассматриваемой задаче нет необходимости находить вспомогательный параметр θ, однако от него зависит искомая оценка вектора x. Поэтому выражение (1) можно заменить формулой $y = H'(x, \theta) + v$, в которой функция H' нелинейно связывает векторы y, x, v. Это определяет нелинейный характер задачи оценивания и новизну предлагаемого подхода.

Примером практической задачи в приведенной постановке служит нахождение оценки параметра геофизического поля в произвольной заданной точке с использованием статистической информации о его пространственной изменчивости, при условии, что вспомогательные параметры модели изменчивости (дисперсия, радиус корреляции) априорно неизвестны [5, 6].

3. Общее решение задачи оценивания и условия его получения

Строго оптимальное общее решение поставленной задачи пока не найдено. Поэтому рассматривается решение, позволяющее легко найти субоптимальную оценку вектора x. В целях упрощения изложения ограничимся зависимостью матрицы ковариации $P_x(\theta)$ от скалярного вспомогательного параметра θ.

Допустим, что θ может принимать дискретные значения θ_i в $i = 1, \dots, n$ узлах сетки на интервале $[\theta_1, \theta_n]$. Каждому значению θ_i соответствует «своя» матрица ковариации

$P_x(\theta_i)$ в уравнении (1). Для n значений θ_i сформируем расширенную систему уравнений наблюдения в виде:

$$\left.\begin{matrix} y = H(x) + v, \text{для } P_x(\theta_1) \\ \vdots \\ y = H(x) + v, \text{для } P_x(\theta_n) \end{matrix}\right\}, \text{или } Y = hY + V, \tag{2}$$

где $Y = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} y \\ \vdots \\ y \end{matrix}\right\} n \text{ раз} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}$ и $V = \begin{bmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix}$ – составные векторы, включающие каждый n исходных векторов x, y и v, соответственно; блочная матрица h содержит n блоков исходной матрицы наблюдения H из (1); блочная матрица ковариации R_V вектора V содержит n^2 блоков R_v. Априорная ковариационная матрица $P_X(\theta_1, \dots, \theta_n)$ вектора X формируется на основе $P_x(\theta)$. Например, для этой цели может использоваться взаимная ковариационная функция $k_x(\theta_i, \theta_j)$ случайных величин вектора x ($j = 1, \dots, n$).

Оптимальная в среднеквадратичном смысле оценка расширенного вектора X и ее матрица ковариации $P_{\hat{X}}$ находятся по формулам [3]:

$$\hat{X} = KY, P_{\hat{X}} = P_X - KhP_X, K = P_X h^T (hP_X h^T + R_V)^{-1}. \tag{3}$$

Согласно (2) оценка $\hat{X}$ содержит n частных оценок вектора x, которые обозначим $\hat{x}_i$. Различные $\hat{x}_i$ являются коррелированными, поскольку находятся по общим для всех них измерениям y. Однако из постановки задачи следует, что все частные оценки должны совпадать: $\hat{x}_i = \hat{x}_j$. Последнее позволяет ввести следующее ограничение в отношении n частных оценок: $M\hat{X} = 0$, где матрица M формируется из блоков единичных матриц $I_{n\times n}$ так, чтобы выполнялись равенства $\hat{x}_i - \hat{x}_j = 0$ для всех сочетаний $i \neq j$. С учетом этого новая оценка составного вектора X, в которой все частные оценки $\hat{x}_i$ равны между собой, и ее матрица ковариации могут быть найдены по формулам:

$$\tilde{X} = [\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n]^T = \hat{X} - \tilde{K}M\hat{X}, P_{\tilde{X}} = P_{\hat{X}} - \tilde{K}MP_{\hat{X}}, \tilde{K} = P_{\hat{X}}M^T(MP_{\hat{X}}M^T)^{-1}. \tag{4}$$

Окончательно искомая оценка вектора x выбирается из вектора $\tilde{X}$, как произвольная i-я частная оценка, например, $\tilde{x}_1$ (соответственно выбирается и матрица ковариации этой оценки из $P_{\tilde{X}}$).

Таким образом, в предложенном субоптимальном решении задачи можно выделить два этапа. На первом находятся частные оценки (3) составного вектора, соответствующие введенным в рассмотрение дискретным значениям θ_i неизвестного параметра. На втором этапе по частным оценкам и их ковариациям находится окончательная оценка (4), единая для всех дискретных значений неизвестного параметра. Сам неизвестный параметр θ не подлежит оценке, несмотря на то, что его дискретные значения θ_i фигурируют в ходе решения. Это отличает рассматриваемый подход от известных нелинейных методов оценивания.

Необходимым условием для получения численного решения является существование обратных матриц в формулах (3) и (4). Матрица R_V не обеспечивает существование обратной матрицы в (3), что вытекает из вышеизложенного порядка ее формирования. Числа обусловленности ковариационных матриц $P_{\hat{X}}, P_{\tilde{X}}$ возрастают, если в них оказываются блоки (частные матрицы ковариации), все соответствующие элементы которых почти равны. Это возможно когда две или более альтернативные модели в (1) оказываются «близки» друг другу несмотря на то, что определяющие их параметры θ_i имеют разные значения. Здесь примерами могут служить альтернативные модели измерений с очень близкими значениями θ_i, θ_j узлов сетки, либо модели, в которых неизвестный параметр θ является аргументом какой-либо функции, имеющей зону насыщения. Авторы полагают, что обусловленность матриц $P_{\hat{X}}, P_{\tilde{X}}$ на практике в значительной степени определяется физическим смыслом случайных векторов x и v в исходной формуле (1), которую часто используют при моделировании измерений [7]. Непосредственное нахождение чисел обусловленности указанных матриц позволяет на практике обосновывать выбор дискретных значений θ_i неизвестного параметра в целях получения искомой оценки вектора x. Это позволяет не принимать в расчет отдельные значения θ_i без существенного снижения точности искомых оценок параметров.

Нахождение оценок непосредственно по формулам (3) и (4) сопряжено с большим объемом вычислений, что вызвано кратным увеличением размерностей векторов и матриц по сравнению с исходным уравнением наблюдения (1). Однако при создании алгоритмов, реализующих предлагаемый подход, существует возможность не учитывать многие элементы векторов, что позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты.

4. Заключение

Предложено новое решение задачи оценивания, в которой неизвестные параметры нелинейно связаны с доступными измерениями. Оно может рассматриваться, как развитие метода сеток, поскольку предусматривает определение оценок параметров путем взвешенного суммирования частных оценок. Характерной особенностью решения является дополнительный учет ковариации частных оценок и (или) весовых коэффициентов. Это позволяет, в отличие от известных методов, исключить априорные вероятности возможных значений неизвестных параметров из состава исходных данных задачи оценивания. Реализация предложенного подхода сопряжена с ощутимым увеличением вычислительных затрат. Однако он может быть эффективен в повышении качества оценок при решении нелинейных задач оценивания, характеризующихся низкой точностью и (или) малым числом доступных измерительных данных.

Список литературы

1. Берковский Н.А., Степанов О.А. Исследование погрешности вычисления оптимальной байесовской оценки методом Монте–Карло в нелинейных задачах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. Т. 52, № 3. С. 3-14.
2. Дмитриев С.П., Степанов О.А. Нелинейные алгоритмы комплексной обработки избыточных измерений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2000. № 4. С. 52-61.
3. Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2010. 509 с.
4. Alspach D.L., Sorenson H.W. Nonlinear Bayesian Estimation Using Gaussian Sum Approximations // IEEE Trans. Autom. Cont. 1972. Vol. AC-17, No. 4. P. 439-448.
5. Шолохов А.В., Беркович С.Б., Котов Н.И. и др. Оценивание параметров нелинейных моделей на основе метода сеток с привлечением априорной информации о весах узлов // Измерительная техника. 2017. № 4. С. 35-37.
6. Старосельцев Л.П., Яшникова О.М. Оценка погрешностей определения параметров сильно аномального гравитационного поля Земли // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16, № 3. С. 533-540.
7. Белоножко М.Г., Беркович С.Б., Котов Н.И., Шолохов А.В. Нелинейное оценивание параметров методом сеток с учетом корреляции частных оценок // Измерительная техника. 2020. № 9. С. 9-14.