УДК 519.626.2

ПРИМЕНЕНИЕ БАД-МЕТОДОЛОГИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

В.И. Зубов
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
Россия, 119333, Москва, Вавилова ул., 40
E-mail: vladimir.zubov@mail.ru

Ключевые слова: задачи оптимального управления, численные методы, быстрое автоматическое дифференцирование, тепловые процессы.

Аннотация: В докладе кратко описывается методология быстрого автоматического дифференцирования и ее преимущества при численном решении задач оптимального управления. Представлены также результаты, полученные при решении с помощью этой методологии некоторых задач оптимального управления динамическими системами, из которых важнейшими являются задачи оптимального управления тепловыми процессами с фазовыми переходами и обратные коэффициентные задачи.

1. Введение

При численном решении задач управления сложными динамическими системами возникающая при этом задача оптимального управления обычно сводится к задаче нелинейного программирования. В ВЦ РАН более 50 лет проводятся работы по созданию и совершенствованию численных методов решения такого рода задач. Часто они решаются градиентными методами минимизации целевого функционала. А для этого необходимо уметь точно вычислять градиент целевой функции конечного числа переменных.

Эффективно и с машинной точностью это позволяет сделать методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методология), впервые достаточно полно представленная в [1]. Дальнейшее ее развитие (см. [2]) привело к тому, что в настоящее время БАД-методология представляет собой современный аппарат, помогающий эффективно решать задачи оптимального управления сложными динамическими системами. В основе БАД-методологии лежит общий подход к дифференцированию сложных функций, возникающих в многошаговых процессах. По своей сути эта методология представляет собой метод множителей Лагранжа, который применяется к дискретному варианту задачи оптимального управления. БАД-методология позволяет получить такую аппроксимацию сопряженной задачи, которая согласована с дискретизацией прямой задачи и с аппроксимацией целевого функционала.

На основе БАД-методологии был разработан и применен на практике эффективный подход к численному решению задач управления тепловыми процессами с фазовыми переходами. С такого рода задачами (задачи типа Стефана) сталкиваются во многих случаях, из которых важнейшими и наиболее распространенными являются случаи плавления и затвердевания. Существенной чертой таких задач является наличие движущейся поверхности раздела между двумя фазами (жидкой и твердой). Закон движения этой поверхности заранее неизвестен, и его следует определять.

В докладе рассматриваются некоторые задачи оптимального управления тепловыми процессами, решенные с помощью БАД-методологии.

2. БАД-методология

Пусть непрерывно-дифференцируемая вектор-функция $\Phi(z,u)$ задает отображение $\Phi: R^n \times R^r \to R^n$ и пусть имеется связь $\Phi(z,u) = 0_n$, где ($z \in R^n, u \in R^r$, 0_n - n-мерный нулевой вектор).

Пусть также задана непрерывно-дифференцируемая скалярная функция $W(z,u)$.

Если функцию $z = z(u)$ определять с помощью соотношения (связи) $\Phi(z,u) = 0_n$, то можно рассматривать сложную функцию $\Omega(u) = W(z(u),u)$. Определить градиент такой сложной функции не всегда просто. БАД-методология позволяет автоматизировать этот процесс.

Представим вычисление функции $z = z(u)$ формально как некоторый многошаговый процесс

(1) $$z_i = F(i, Z_i, U_i), 1 \le i \le n,$$

где Z_i - множество компонент z_j, встречающихся в правой части равенства (1), U_i - множество компонент u_j, встречающихся в правой части равенства (1).

Тогда градиент сложной функции $\Omega(u) = W(z(u),u)$ относительно переменной u определяется равенствами

$$d\Omega/du_i = W_{u_i}(z,u) + \sum_{q \in K_i} F_{u_i}(q, Z_q, U_q)\, p_q,$$

где множители $p_i \in R^n$ представляют собой решение сопряженной задачи

$$p_i = W_{z_i}(z,u) + \sum_{q \in Q_i} F_{z_i}(q, Z_q, U_q)\, p_q,$$

$$Q_i = \{j: 1 \le j \le n, z_i \in Z_j\}, K_i = \{j: 1 \le j \le n, u_i \in U_j\}.$$

Преимущества БАД-методологии:

- канонические формулы;
- машинная точность;
- вычислительная эффективность.

3. Управление процессом сварки металлов

Пусть имеется некий металлический образец цилиндрической формы и узкий источник энергии, расположенный вдоль оси цилиндра. Благодаря энергии, выделяемой источником, металлический образец нагревается, и часть его, ближайшая к источнику, может расплавиться. Управляя выделяемой энергией, мы можем управлять процессом плавления и кристаллизации металлического образца. Распределение по времени количества выделяемого источником тепла (мощность источника) выбирается в качестве управляющей функции. В задаче требуется найти такое распределение мощности источника по времени, при котором будет расплавлена масса вещества, не меньшая заданной массы, процесс кристаллизации будет протекать со скоростью, не превышающей заданную скорость, и суммарная энергия, выделенная источником за время всего процесса, будет минимальной.

Сформулированная задача исследовалась в рамках одномерной (с радиальной симметрией) нестационарной постановки. В плоскости независимых переменных (r,t) рассмотрим прямоугольную область $Q = \{ (r,t) : 0 < r < R, 0 < t \le \Xi \}$ (рис. 1).

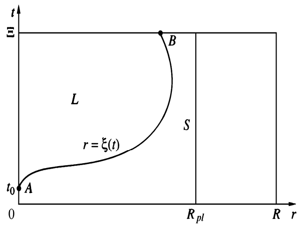

Рис. 1.

Область Q гладкой линией AB ($r = \xi\ (t)$) разбивается на две подобласти L (область жидкой фазы) и S (область твердой фазы). Линия AB - траектория движения фронта плавления и кристаллизации, $t_0 \geq 0$ - момент времени, при котором зарождается линия AB.

В области Q ставится двухфазная задача Стефана.

Источник подводимого тепла $F\ (r\ ,t\ )$ представим в виде $F\ (r\ ,t\ ) = \varphi\ (r)\ f_w\ (t)$, где $\varphi\ (r)$ - некоторая заданная функция, описывающая распределение выделяемой энергии по пространству.

Пусть $\xi\ (t)$ - траектория движения фронта раздела фаз, соответствующая источнику $f_w\ (\ t)\ , t \in [\ 0\ , \Xi\ ]$ и ξ_f – максимальное значение величины $\xi\ (t)$ при $t_0 \leq t \leq \Xi$. Вариационную задачу можно сформулировать следующим образом: среди ограниченных кусочно-непрерывных и имеющих кусочно-непрерывную производную функций $f\ (\ t)$, при которых $\xi_f \geq R_{pl}$ и $\xi'(\ t) \geq -d^2$, найти такую функцию $f_{opt}\ (\ t)$, что функционал

$$J = \int_0^{\Xi} f\ (\ t)\ d\ t$$

достигает на ней минимального значения.

Решение сформулированной вариационной задачи проводилось численно с использованием градиентных методов. Ограничения, накладываемые на решение задачи, учитывались с помощью метода штрафных функций. Градиент функционала вычислялся с помощью БАД-методологии.

Анализ результатов проведенных расчетов позволил сделать вывод о структуре оптимального управления (рис. 2):

- оптимальное управление состоит из двух основных частей;
- первая часть (ответственная, в основном, за плавление вещества) совпадает с верхним участком краевого экстремума $f_w\ (t) \equiv f_{\max}$;
- вторая часть оптимального управления (ответственная за кристаллизацию вещества) меньше первой части и отделяется от нее небольшим участком с $f_w\ (t) \equiv 0$.

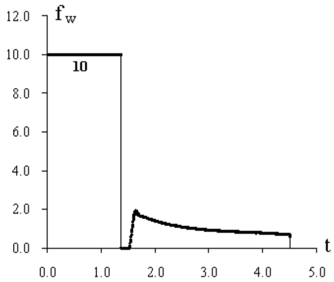

Рис. 2.

Основываясь на результатах проведенного исследования, предложен алгоритм построения оптимального управления: оптимальное управление может быть определено в результате последовательного решения вначале задачи плавления, а затем, используя ее результаты как начальные данные, задачи кристаллизации.

4. Управление процессом кристаллизации металла

Процесс кристаллизации металла начинается с того, что в рабочую полость литейной формы (рис. 3) заливают жидкий металл. Литейная форма подогрета до заданной температуры T_{form}, а залитый в нее металл - до температуры T_{met}. После этого под воздействием изменяющихся внешних условий начинается постепенное охлаждение литейной формы с залитым в нее металлом. Для управления этим процессом используется специальная установка. Она состоит из верхней и нижней частей. Верхняя часть представляет собой плавильную печь, внутри которой перемещается объект. Она моделируется двумя вертикальными, расположенными друг против друга стенками, которые соединены сверху горизонтальной стенкой («крыша»). Стенки печи и «крыша» разогреты до заданной сравнительно высокой температуры. Нижняя часть установки является охладителем и состоит из большой емкости, заполненной жидким алюминием.

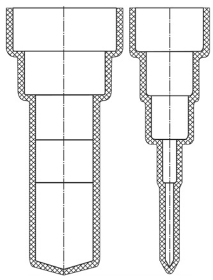

Рис. 3.

Литейная форма с жидким металлом медленно погружается в охладитель. Жидкий алюминий имеет сравнительно низкую температуру, благодаря чему происходит кристаллизация металла. Однако объект получает тепло от стенок плавильной печи, что не позволяет процессу кристаллизации протекать слишком быстро.

Процесс остывания металла и литейной формы описывается нелинейным уравнением теплопроводности (с разрывными термодинамическими параметрами). Этот процесс происходит благодаря воздействию окружающей среды на объект.

На эволюцию поверхности раздела фаз существенное влияние оказывает скорость перемещения литейной формы. Поэтому в качестве управления выбрано зависящее от времени перемещение литейной формы. Для его определения сформулирована задача оптимального управления. В качестве целевого функционала выбран функционал, обеспечивающий близкую к требуемой скорость перемещения поверхности раздела фаз и выпрямление этой поверхности. Задача оптимального управления состоит в выборе такого управления, при котором функционал достигает минимального значения. Она сводилась к задаче безусловной оптимизации и решалась численно с помощью градиентных методов, а градиент определялся с помощью БАД-методологии.

Расчеты проводились для образца, сечения которого представлены на рис. 3. Координата требуемой поверхности раздела фаз менялась во времени с постоянной скоростью 2 мм/мин. В качестве начального управления $u_0(t)$ выбрано перемещение литейной формы с постоянной скоростью 25 мм/мин (рис. 4). Значение целевого функционала при этом равнялось $I(u_0) = 8.56$. В результате оптимизации значение целевого функционала уменьшилось более чем в 3500 раз и составило $I(u_{opt}(t)) = 0.0024$. Оптимальное управление $u_{opt}(t)$ показано на рис. 4. Его использование позволило существенно выпрямить поверхность раздела фаз и одновременно обеспечило ее движение с требуемой скоростью. При таком управлении реальная поверхность раздела фаз практически совпала с требуемой.

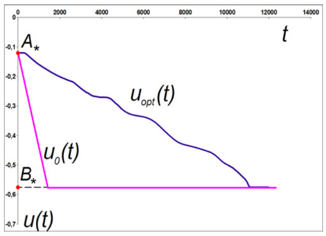

Рис. 4.

Опыт использования БАД-методологии был применен и к решению обратных коэффициентных задач. Была решена задача идентификации зависящего от температуры коэффициента теплопроводности вещества ([4]).

Хочется отметить, что для одних задач применение БАД-методологии позволило повысить эффективность методов построения решения, для других получить решение удалось только с ее помощью.

Список литературы

1. Evtushenko Y.G. Computation of exact gradients in distributed dynamic systems // Optimization Methods and Software. 1998. Vol. 9. P. 45-75.
2. Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И. Об обобщённой методологии быстрого автоматического дифференцирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 11. С. 1847-1862.
3. Албу А.Ф., Зубов В.И. О влиянии параметров установки на управление процессом кристаллизации вещества в литейном деле // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 2. С. 238-248.
4. Evtushenko Yury, Zubov Vladimir and Albu Alla. Inverse coefficient problems and fast automatic differentiation // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2022. Vol. 30, No. 3. P. 447-460.