УДК 519.626.2

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ТРЕХТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

А.И. Калинин
Белорусский государственный университет
Беларусь, 220030, Минск, Независимости пр. 4
E-mail: kalininai@bsu.by

Л.И. Лавринович
Белорусский государственный университет
Беларусь, 220030, Минск, Независимости пр. 4
E-mail: lavrinovich@bsu.by

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенные система, квадратичный функционал, оптимальное управление, обратная связь, асимптотические приближения.

Аннотация: Рассматривается задача о построении переходного процесса с минимальными энергетическими затратами для линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей три группы переменных с существенно различными скоростями изменения. Строятся асимптотические приближения к решению этой задачи в виде программы и обратной связи. Основное достоинство предлагаемых вычислительных процедур состоит в том, что при их реализации исходная задача распадается на три невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется асимптотическим методам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти системы являются жесткими и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Поэтому возрастает роль асимптотических методов, тем более, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи оптимального управления на задачи меньшей размерности.

Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений к решению следующей задачи оптимизации переходного процесса в линейной стационарной сингулярно возмущенной системе:

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1 u\,,\ \ x(t_*) = x_*\,,$$

$$\mu\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2 u\,,\ \ y(t_*) = y_*\,, \quad (1)$$

$$\mu^2\dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3 u\,,\ \ z(t_*) = z_*\,,$$

$$x(t^*) = 0\,,\ \ y(t^*) = 0\,,\ \ z(t^*) = 0\,, \quad (2)$$

(3) $$J(u)=\frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*}u^{\mathrm{T}}Pudt\to\min,$$

где μ – малый положительный параметр, t_*, t^* – заданные моменты времени ($t_*<t^*$), x – n_1-вектор медленных переменных, y, z –векторы быстрых переменных размерности n_2 и n_3 соответственно, u – r-вектор управления. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. В критерии качества P – положительно-определенная симметрическая матрица.

Предположение 1. Матрицы A_{33}, $C=A_{22}-A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}$ устойчивые, т.е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.

Введем понятия, которые позволят уточнить то, что будем понимать под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t\in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка $(N=0,1,2,\ldots)$, если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O\left(\mu^{N+1}\right)$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x,y,z,t,\mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (x_*,y_*,z_*,t_*), $t_*<t^*$, имеет место $u^{(N)}(x_*,y_*,z_*,t_*,\mu)=u^{(N)}(t_*,\mu)$, где $u^{(N)}(t,\mu)$, $t\in T$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1) – (3).

Целью исследования рассмотренной задачи, которую можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами, является построение асимптотических приближений к ее решению в виде программы и обратной связи. Суть предлагаемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных – конечномерных элементов, по которым легко восстанавливается решение задачи. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения трех базовых невозмущенных задач оптимального управления с n_1, n_2, n_3 фазовыми переменными соответственно. Первой из них является вырожденная задача

$$\dot{x}=A_0x+B_0u,\ x(t_*)=x_*,\ x(t^*)=0,$$

$$J_1(u)=\frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*}u^{\mathrm{T}}Pudt\to\min,$$

где

$$A_0=A_{11}-A_{13}A_{33}^{-1}A_{31}-\left(A_{21}-A_{13}A_{33}^{-1}A_{32}\right)C^{-1}\left(A_{21}-A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}\right),$$

$$B_0=B_1-A_{13}A_{33}^{-1}B_3-\left(A_{12}-A_{13}A_{33}^{-1}A_{32}\right)C^{-1}D,\ D=B_2-A_{23}A_{33}^{-1}B_3.$$

В дальнейшем эту задачу будем называть первой базовой.

Во второй базовой задаче

$$\dot{y}=Cy+Du,\ y(0)=C^{-1}Du^0\left(t^*\right),$$

$$y(-\infty)=0,\ J_2(u)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}u^{\mathrm{T}}Puds\to\min,$$

$u^0\left(t\right)$, $t\in T$, – решение первой базовой задачи.

Третья базовая задача имеет вид

$$\dot{z} = A_{33}z + B_3 u,\ z(0) = A_{33}{}^{-1}B_3\left(u^0\left(t^*\right) + u^*\left(0\right)\right),$$
$$z(-\infty) = 0,\ J_3(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}} P u d\tau \to \min,$$

где $u^*\left(s\right)$, $s \le 0$, – оптимальное управление во второй базовой задачи. Обозначим через $u_*\left(\tau\right)$, $\tau \le 0$, – решение третьей базовой задаче.

Предположение 2. Динамические системы в базовых задачах являются вполне управляемыми [1].

Предположения 1, 2 гарантируют существование и единственность решений базовых задач, которые являются нормальными экстремалями. При сделанных предположениях разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N построить асимптотически субоптимальные управления N – го порядка в рассмотренной задаче. Обоснование алгоритма опирается на принцип максимума [2] и метод пограничных функций [3]. Вычислительная процедура алгоритма помимо решения базовых задач включает в себя интегрирование систем невозмущенных линейных дифференциальных уравнений и нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Впрочем, асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка может быт сформировано непосредственно после решения базовых задач, поскольку оно представимо в виде

$$u^{(0)}\left(t,\mu\right) = u^0\left(t\right) + u^*\left(\left(t - t^*\right)/\mu\right) + u_*\left(\left(t - t^*\right)/\mu^2\right),\ t \in T\,.$$

Заметим, что это управления не зависит от начальных состояний y_*, z_* быстрых переменных.

Наряду с асимптотическими приближениями к программному оптимальному управлению построена асимптотически субоптимальная обратная связь, которая линейна по медленным переменным и не зависит от текущих позиций быстрых переменных.

Применяемый подход позволяет исследовать задачи, в которых имеется несколько групп быстрых переменных с иерархией скоростей по целым степеням малого параметра. В этом случае количество базовых задач будет равно количеству групп разнотемповых переменных. Такое обобщение вносит в алгоритм непринципиальные изменения, которые легко прослеживаются на примере рассмотренной задачи. В то же время это приводит к громоздким формулам.

Отметим также, что развитие полученных результатов нестационарные системы с достаточно гладкими коэффициентами не встречает принципиальных трудностей.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М: Наука, 1968 – 476 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г. Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
3. Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, № 4. С. 611-642.