УДК 517.977.56:534.113

ОПТИМИЗАЦИЯ И СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЬЕЗОАКТЮАТОРА

Г.В. Костин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

E-mail: kostin@ipmnet.ru

Ключевые слова: управление системами с распределенными параметрами, теория упругости, оптимизация движения.

Аннотация: Исследуются продольные колебания консольно закрепленного упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическим актюатором, который создает на определенном участке равномерно распределенную силу в поперечном сечении. Ставится задача приведения системы за фиксированное время в терминальное состояние с минимизацией квадратичной нормы пьезоэлектрической силы. Предложена обобщенная формулировка задачи, допускающая точное решение для случая однородного распределения механических параметров при рациональном отношении положения и длины актюатора к длине стержня. Анализируется влияние расположения исполнительного устройства на качество управления.

1. Введение

Изучение управляемости динамических систем с распределенными параметрами остается одним из важных направлений в теории управления. Определение области достижимости, в которое систему можно привести с помощью заданного класса управляющих воздействий, дает представление о ее предельных возможностях и подсказывает эффективные методы оптимизации движения. Так для однородного упругого стержня, управляемого с помощью нагрузки с одного конца, наименьшее время гарантированного приведения в предписанное состояние равно удвоенному времени прохождения продольной волны вдоль оси тела [1].

На основе обобщенной формулировки начально-краевой задачи, подробно изложенной в [2], в статье [3] показано, что допустимое время управления можно сократить в N раз, если добавить к краевой силе N одинаковых пьезоэлектрических актюаторов (ПА), расположенных последовательно без промежутков вдоль оси стержня и создающих кусочно-постоянную нормальную силу в поперечном сечении. В [4] доказано, что без граничной силы нельзя изменить амплитуды определенной группы мод колебаний свободного стержня и достижимыми оказываются лишь периодические терминальные состояния с длинной волны обратно пропорциональной числу ПА. В [5] рассмотрена схема, в которой ПА расположены с промежутками периодически, и предлагается алгоритм оптимального гашения колебаний со взвешенной минимизацией квадрата интегральной нормы вектора управления.

В представленной статье, в отличие о предыдущих работ автора, изучена возможность управления продольными колебаниями консольно закрепленного однородного упругого стержня с помощью одного ПА, если координаты его концов принадлежат (за некоторым исключением) множеству рациональных чисел. Анализируется качество управления в зависимости от расположения и длины ПА.

2. Постановка задачи управления

Рассматриваются продольные колебания тонкого однородного прямолинейного упругого стержня длины L на интервале времени $t \in \mathcal{T} = (0, T)$. Левый конец стержня с координатой $x = 0$ жестко закреплен, правый конец с координатой $x = L$ свободен от нагрузок. Вдоль оси стержня на интервале $x \in \mathcal{U} = (x_-, x_+)$ расположен ПА длины $\ell = x_+ - x_-$ (см. схему на рис. 1). ПА создает в поперечном сечении стержня равномерно распределенную на отрезке $\mathcal{U}$ нормальную управляющую силу:

$$x \in \mathcal{U}: \quad f(t,x) = \dot{u}(t), x \notin \mathcal{U}: \quad f(t,x) = 0. \tag{1}$$

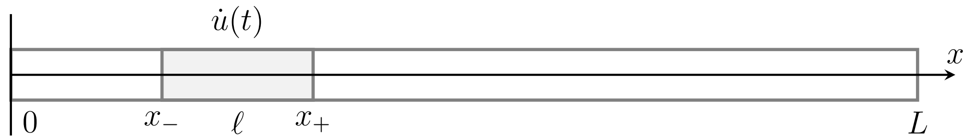

Рис. 1. Схема расположения ПА на консольно закрепленном стержне

В пространственно-временной области $(t, x) \in \mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = (0, L)$, состояние стержня выражается через пару функций (w, r). Здесь $w : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ – это перемещение его точек, а $r : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ – динамический потенциал. Первая производная потенциала по времени $s = \partial_t r$ определяет нормальную силу в поперечном сечении, производная по пространственной координате $p = \partial_x r$ задает линейную плотность импульса.

Сформулируем обобщенную краевую задачу о движении свободного стержня [2]. Пусть заданы начальные распределения перемещений $w_0 \to H^1(\mathcal{X})$ и импульса $p_0 \to L^2(\mathcal{X})$, терминальное состояние $w_T \to H^1(\mathcal{X})$ и $p_T \to L^2(\mathcal{X})$ и допустимая сила $f \in L^2(\mathcal{D})$. Требуется найти кинематическую и динамическую переменные $(w^*(t, x), r^*(t, x))$, которые минимизируют функционал состояния

$$\begin{gathered}
\Phi[w^*, r^*] = \min\nolimits_{w,r} \Phi[w, r] = 0, \\
\Phi = \int_{\mathcal{D}} \left(\rho^{-1} g^2 + \kappa^{-1} h^2\right) \mathrm{d}\mathcal{D}, \quad g = p - \rho \partial_t w, \quad h = s - f - \kappa \partial_x w; \\
w(0, x) = w_0(x), \quad p(0, x) = p_0(x), \quad x \in \mathcal{X}; \\
w(T, x) = w_T(x), \quad p(T, x) = p_T(x), \quad x \in \mathcal{X}; \\
w(t, 0) = 0, \quad s(t, L) = 0, \quad t \in \mathcal{T}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Если сила $f(t, x)$ определяется, согласно (1), через производную от функции управления $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, то можно сформулировать следующую задачу оптимального управления. Пусть с учетом краевых условий пара функций $(w, r) \to H^1(\mathcal{D}; \mathbb{R}^2)$ минимизирует функционал Φ для произвольного управления $u \in H^1(\mathcal{T})$. Требуется найти такую допустимую функцию $u^*(t)$, которая при фиксированном времени T и выполнении ограничений (2) минимизирует целевой функционал

$$J[u] = \frac{\ell}{2\kappa T} \int_{\mathcal{T}} \dot{u}^2 \mathrm{d}t \to \min_u, \quad u(0) = 0. \tag{3}$$

Здесь J – это средняя потенциальная энергия, порождаемая силой $f(t, x)$.

3. Построение точного решения

Перейдем к безразмерным переменным так, чтобы $L = \rho = \kappa = 1$. Можно показать, что при таком обезразмеривании система не управляема, если $x_- = \frac{m}{2k+1}$ и $\ell = \frac{n}{2k+1}$ (см. рис. 1)), где $k > 1$, $m \geqslant 0$, $n > 0$ – целые числа. При таких параметрах нельзя влиять на моды колебаний с номерами $j = k + 2ki + i$ ($i \in \mathbb{Z}_+$), которым соответствует собственные частоты $\omega_j = j\pi + \frac{\pi}{2}$. Удается построить точное решение краевой задачи (2) при $x_\pm \in \mathbb{Q}$ (исключая упомянутые условия неуправляемости) и $T \geqslant 2N$. Здесь $x_\pm = N_\pm/N$, $N_- \in \mathbb{Z}_+$, $N_+, N \in \mathbb{N}$, $N_+ \leqslant N$. На время управления не накладываются дополнительно никакие ограничения, но для произвольного значения T используется довольно сложный алгоритм, описанный, например, в [3]. Ограничимся более простым случаем, когда $T = M/N$, $M \in \mathbb{N}$.

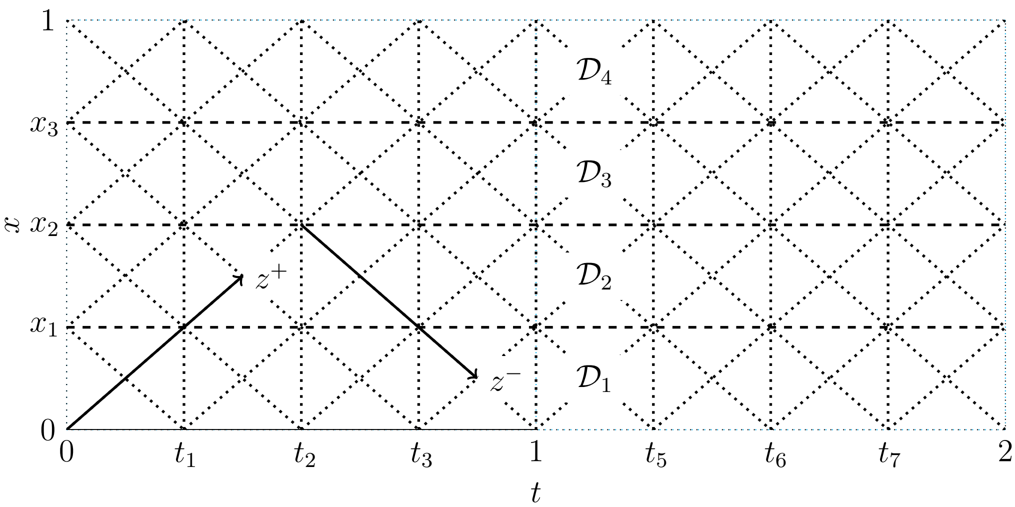

Рис. 2. Сетка на пространственно-временной области $\mathcal{D}$ для $M = 8$ и $N = 4$

Разобьем интервал $\mathcal{X}$ на N подынтервалов $\mathcal{X}_n = (x_{n-1}, x_n)$ длины $\lambda = 1/N$ ($x_n = n/N$, $x_- = x_{N_-}$ и $x_+ = x_{N_+}$). Область определения $\mathcal{D}$ разделим на подобласти $\mathcal{D}_n = \mathcal{T} \times \mathcal{X}_n$ (см. рис. 2), затем на равные пространственно-временные прямоугольники $\mathcal{D}_{m,n} = \mathcal{T}_m \times \mathcal{X}_n$, $\mathcal{T}_m = (t_{m-1}, t_m)$, $t_m = m/N$. В свою очередь, $\mathcal{D}_{m,n}$ разобьем диагоналями на открытые треугольники $\Delta_{k,m,n}$, $k = 1, 2, 3, 4$. На каждой области $\mathcal{D}_n$, переменные состояния (w, r) выражаются через функции бегущих волн $w_n^\pm$ как

$$w(t, x) = w_n^+(z^+) + w_n^-(z^-), \quad r(t, x) = w_n^+(z^+) - w_n^-(z^-) + u_n(t), \quad z^\pm = t \pm x. \tag{4}$$

Здесь $u_n = u$ при $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{U}$ или $u_n = 0$ при $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{U} = \varnothing$.

Введем для каждого элемента сетки $\Delta_{k,m,n}$ уникальный набор из трех функций

$$w^{\pm}_{m,n}(z) = w^{\pm}_k(z + t_m \pm x_n), \quad u_m(z) = u(z + t_m), \quad z \in \mathcal{Z} = (0, \lambda). \tag{5}$$

Тогда начальные, граничные и межэлементные условия для (v, r) можно свести к системе линейных алгебраических уравнений относительно функций $w^{\pm}_{k,m}$ и u_m. Полученную систему всегда можно разрешить, если выполнены ограничения на параметры x_- и ℓ, которые обсуждались в начале этого раздела. Оставшиеся неразрешенными функции $u_m(z)$, $m = 1, \ldots, M - 2N$, определяются из условия минимальности целевого функционала J введенного в (3).

Из свойства непрерывности функции управления $u(t)$ и начальных ограничений вытекают условия на краевые значения следующих переменных: $u_1(0) = 0$, $u_m(\lambda) = u_{m+1}(0)$, где $m = 1, \ldots, M - 1$. После подстановки функций u_m, выполняющих краевые условия, в функционал J исходная задача (1)–(3) сводится к одномерной вариационной задаче относительно набора функций $(u_m)_{m=1}^{M-2N}$. Необходимые условия стационарности вариационной задачи – это система линейных ОДУ с постоянными коэффициентами, а также существенных краевых условий и условий трансверсальности. Решение системы находится в квадратурах.

4. Численный пример

В качестве примера возьмем краевые распределения $v(0, x) = -r(0, x) = \sin 4x$, $v(T, x) = p(T, x) = 0$. Пусть $T = 2$ и $\ell = 0.25$.

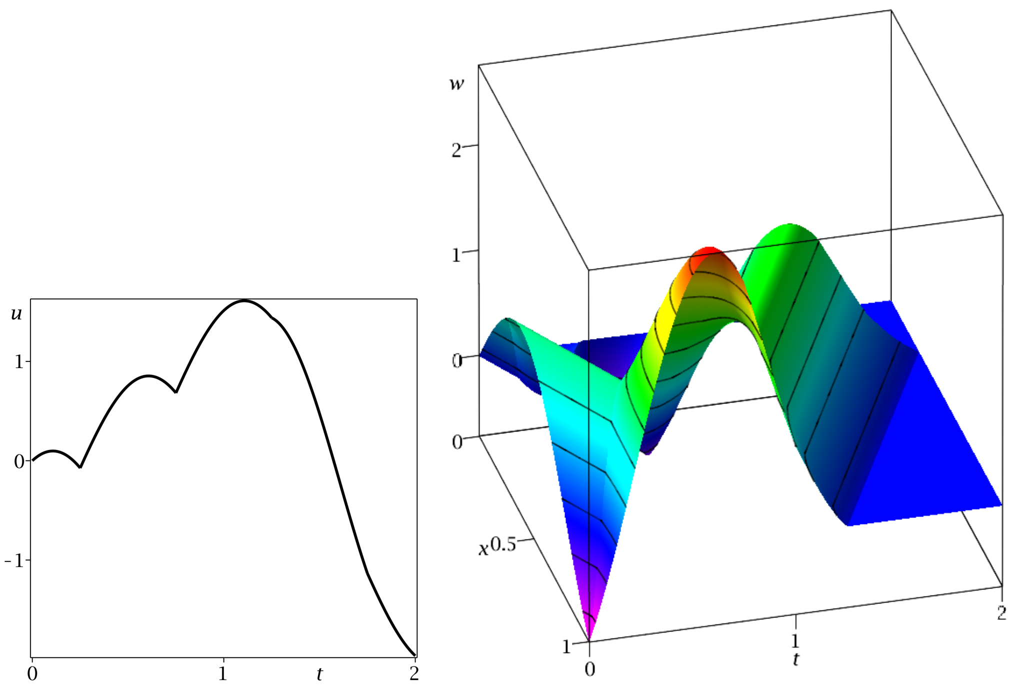

Рис. 3. Допустимое управление $u(t)$ (слева) и перемещения $w(t, x)$ (справа)

Для $x_- = 0$ слева на рис. 3 показано допустимое управление u, переводящее стержень в нулевое терминальное состояние. Справа на рис. 3 приведено

Таблица 1. Зависимость значения функционала цены от положения стержня

x_-	0	0.25	0.5	0.75
J	1.53	8.24	3.75	22.21

соответствующее непрерывное поле перемещений $w(t,x)$, которое построено на сетке, показанной на рис. 2, и выполняет все наложенные ограничения. Продемонстрируем зависимость нормы управления от положения ПА для приведенных выше параметров ℓ и T. В таблице 1 помещены значения функционала J, соответствующие разным координатам левого конца ПА $x = x_-$.

Для выбранных геометрических параметров время $T = T^* = 2$ ($M^* = 2N = 8$) является кратчайшим из допустимых, при котором отсутствуют свободные функции u_m, предназначенные для оптимизации. При увеличении параметра $M > M^*$ уменьшается значение функционала $J(M)$, которое с точностью до множителя равно осредненному по времени квадрату от производной $\dot{u}$. Для $x_- = 0$ получены следующие значения: $J(9) = 1.35$, $J(10) = 1.14$, $J(11) = 1.03$, $J(12) = 0.89$.

5. Заключение

Предложена обобщенная формулировка задачи оптимального управления упругой конструкцией, представляющей собой консольно закрепленный стержень, на котором расположен ПА, создающий продольную силу. Законы состояния даны в интегральном виде, состояние описывается функцией перемещения и динамическим потенциалом. На фиксированном интервале времени ПА должен перевести систему в заданное состояние с минимизацией интеграла по времени от квадрата этой силы. Приведены условия управляемости системы. Предложен конечно-элементный алгоритм точного построения движения стержня и его оптимизации. Обсуждается возможность уменьшения ресурсов управления за счет выбора геометрических параметров ПА.

Исследование выполнено по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6).

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. Kostin G.V., Saurin V.V. Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
3. Kostin G., Gavrikov A. Optimal motion of an elastic rod controlled by piezoelectric actuators and boundary forces // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). 2022, IEEE Xplore Digital Library.
4. Kostin G., Gavrikov A. Controllability and optimal control design for an elastic rod actuated by piezoelements // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55, No. 16. P. 350–355.
5. Гавриков А.А., Костин Г.В. Оптимизация продольных движений упругого стержня с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2023. № 6. С. 93–109.