УДК 534.113+517.977.56

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ, УПРАВЛЯЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТОВ ПЕЛЬТЬЕ

Г.В. Костин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

E-mail: kostin@ipmnet.ru

Ключевые слова: управление системами с распределенными параметрами, термодинамика, оптимизация теплообмена.

Аннотация: Предложен подход к численному решению задачи оптимального управления процессом теплообмена в тонких прямолинейных стержнях, последовательно сопряженных через элементы Пельтье, которые создают тепловой поток в местах соединения. Математическая модель учитывает теплообмен с окружающей средой, собственную теплопроводность элементов Пельтье и термоизоляцию в конечных точках твердотельной конструкции. На заданном интервале времени ищутся функции управляющих тепловых потоков, которые переводят один из стержней в состояние с заданной температурой. Для расчетов с помощью МКЭ используется интегральное представление закона Фурье и закона теплообмена со средой. Анализируется регуляризация задачи с помощи добавки к целевому функционалу квадрата нормы вектора управления.

1. Введение

Одной из актуальных областей теории управления является оптимизация поведения динамических систем с распределенными параметрами. Теоретический базис управления такими системами, описываемыми, в частности, линейными параболическими уравнениями, заложен в [1, 2]. Актуальным вопросам оптимизации термодинамических процессов в теплопроводящих стержнях, совмещенных с твердотельными термоэлектрическими преобразователями (элементами Пельтье, ЭП), посвящена статья [3]. В этой работе на основе метода интегродифференциальных соотношений [4] дана обобщенная постановка задачи управления системой, состоящей из линейной цепочки стержней, которые разделены ЭП, создающими тепловые потоки между ними. С использованием метода Релея-Ритца и метода конечных элементов (МКЭ) разработана процедура оптимизации изменения температурного режима на определенном участке стержневой системы. В отличие от рассмотренной в [5] задачи, для двух стержней со скалярным управляющим входом, в данной работе изучен более общий случай взвешенной минимизации нормы управления и терминального отклонения от желаемой температуры в рабочем стержне для случая векторного управления.

2. Постановка задачи управления

Рассмотрим термодинамическую систему, которая представляет собой линейную цепь, расположенную вдоль оси x и состоящую из L теплопроводящих стержней, соединенных друг с другом одинаковыми ЭП (см. Рис. 1). Линейный размер ЭП пренебрежимо меньше длины цепи ℓ. Управляющий ЭП с номером i, $i = 1, \dots, L-1$, расположен в точке $x = x_i$. Стержень с номером j, $j = 1, \dots, L$, занимает интервал $I_j = (x_{j-1}, x_j)$. При этом $x_0 = 0$ и $x_L = \ell$. Рассматриваемая цепочка твердых тел термоизолирована на свободных концах. Учитывается собственная теплопроводность ЭП и теплообмен стержней через боковую поверхность с внешней средой.

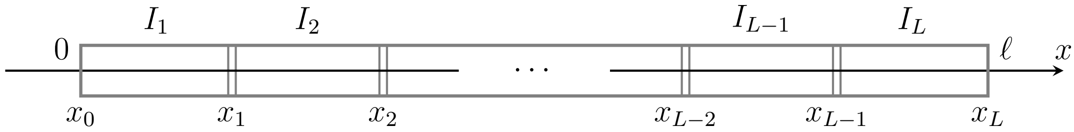

Рис. 1. Схема линейной цепи теплопроводящих стержней, соединенных ЭП

Ставится задача наилучшего приведения j-го стержня в состояние с заданным профилем температуры за фиксированное время T с помощью тепловых потоков $u_i(t)$ $(i = 1, \dots, L-1)$, создаваемых ЭП. В обобщенном виде имеем:

$$
\begin{aligned}
&J = \sum_{n=1}^{L-1} \int_0^T u_n^2 \mathrm{d}t + \frac{\bar{\kappa}^2 \gamma}{T\ell} \int_{I_j} \left(w|_{t=T} - w_T \right)^2 \mathrm{d}x \to \min\nolimits_{(u_n)_{n=1}^{L-1}};\\
&F = \int_\Omega \left(g^2 + \alpha^{-1} h^2 \right) \mathrm{d}\Omega = 0, \quad g = q + \lambda \partial_x w, \quad h = r - \alpha(w - w_a);\\
&\kappa \partial_t w + \partial_x q + r = 0, \quad (t,x) \in \Omega \setminus \{(t,x) : x = x_n,\ n = 1, \dots, L-1\};\\
&w(0,x) = w_0(x), \quad x \in (0,\ell); \quad q(t,0) = q(t,\ell) = 0, \quad t \in (0,T);\\
&[q(t,x_i)] = 0, \quad q(t,x_i) = \beta[w(t,x_i)] + u_i(t), \quad i = 1, \dots, L-1, \quad t \in (0,T).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь F – квадратичная невязка локальных уравнений состояния стержней, $\Omega = (0,T) \times (0,\ell)$ – пространственно-временная область, $u_i(t)$ – управляющий тепловой поток через i-ый ЭП, $w_T(x)$ – целевая температура j-го рабочего стержня, $w_a(t,x)$ – известная температура окружающей среды, $\alpha(x)$ – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $\kappa(x)$ – линейная теплоемкость цепи, $\bar{\kappa} = \int_0^\ell \kappa \mathrm{d}x$ – интегральная теплоемкость цепи, $\lambda(x)$ – теплопроводность стержней, β – коэффициент собственной теплопроводности ЭП, γ – безразмерный весовой коэффициент. Неизвестные переменные: $w(t,x)$ – температура стержней с заданным начальным распределением $w_0(x)$, $q(t,x)$ – тепловой поток через поперечное сечение, $r(t,x)$ – линейная плотность теплового потока через боковую поверхность. В (1) квадратные скобки означают скачок функции по координате x.

3. Алгоритм решения

Используя первый закон термодинамики (третья строка в (1)), выразим функцию теплового потока: $q = -\int_0^x (\kappa w_t + r) \mathrm{d}\chi$. Для численного решения прямой задачи динамики при фиксированном законе управления $u_i(t)$, $i = 1,\dots,L-1$, область Ω разбивается на прямоугольные подобласти (элементы) $\Omega_{m,n} = (t_{m-1}, t_m) \times (z_{n-1}, z_n)$, где $m = 0,\dots,M$, $n = 0,\dots,N$, а $t_0 = 0$, $t_M = T$, $z_0 = 0$, $z_N = \ell$. Здесь $M, N \in \mathbb{N}$ – параметры сетки и $\{x_i\}_{i=0}^{L} \subset \{z_i\}_{i=0}^{N}$. На каждом элементе $(t,x) \in \Omega_{m,n}$ неизвестные переменные w и r представлены в виде линейной комбинации произведения полиномов Бернштейна от t и x степени K:

$$
\begin{gathered}
w(t.x) = \sum_{j=0}^{K}\sum_{k=0}^{K} w_{m,n}^{(j,k)} B_{m,j}^{t}(t) B_{n,k}^{x}(x), \quad r(t.x) = \sum_{j=0}^{K}\sum_{k=0}^{K} r_{m,n}^{(j,k)} B_{m,j}^{t}(t) B_{n,k}^{x}(x),\\
B_{m,j}^{t} = \frac{K!(t-t_m)^j (t_{m-1}-t)^{K-j}}{j!(K-j)!(t_m - t_{m-1})}, \quad B_{n,k}^{x} = \frac{K!(x-z_n)^k (z_{n-1}-x)^{K-k}}{k!(K-k)!(z_n - z_{n-1})}.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Управляющие потоки u_n, $n = 1,\dots,L-1$ аппроксимируется кусочно-полиномиальными функциями

$$
\begin{gathered}
u_n(t) = \sum_{k=0}^{K} u_{m,n}^{(k)} B_{m,k}^{t}(t), \quad t \in (t_{m-1}, t_m);\\
\boldsymbol{u} = \left(u_{m,n}^{(j)}\right)_{j(k,m,n)=1}^{N_u}, \quad j = (K+1)M(n-1) + (K+1)(m-1) + j + 1,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{N_u}$, $N_u = (K+1)(L-1)M$, – вектор управляющих параметров.

Удовлетворяя с помощью части коэффициентов $w_{m,n}^{(j,k)}$ и $r_{m,n}^{(j,k)}$ ограничения из (1), а также межэлементные условия непрерывности $[w(t_m,x)] = 0$ и $[w(t,z_n)] = 0$ при $z_n \neq x_j$, соберем все оставшиеся свободными параметры в вектор состояния $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_y}$, где $N_y = M(N(2K^2 + 2K + 1) - L(K+1) + 3K)$. Подставляя после этого функции w, r из (2) и u из (3) в функционал F с учетом интегрального выражения для q и минимизируя получившуюся квадратичную функцию $F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) \to \min_{\boldsymbol{y}}$, находим наилучший вектор для аппроксимации состояния $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{y}_0$ как решение линейной системы, где матрица $\boldsymbol{A}$ и вектор $\boldsymbol{y}_0$ определяются из F.

Для минимизации функционала цены J из (1), подставим в J аппроксимации $u_i(t,\boldsymbol{u})$ и $w(t,x,\boldsymbol{u})$ для $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{u})$ и получим задачу безусловной минимизации квадратичной функции $J(\boldsymbol{u}) \to \min_{\boldsymbol{u}}$. Оптимальное значение вектора $\boldsymbol{u}^*$ – это тоже решение линейной системы, по которому восстанавливается оптимальный вектор $\boldsymbol{y}^{**} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{y}^0$, а он, в свою очередь, определяет соответствующие функции состояния и управления. Для достоверного моделирования тепловых процессов точность решения должна быть много больше точности приведения в желаемое состояние.

4. Численный пример

Рассмотрим теплопроводящую цепь, состоящую из трех одинаковых однородных стержней ($L = 3$) соединенных двумя ЭП. Без потери общности можно привести задачу (1) к безразмерному виду так, что $\kappa = \lambda = 1$, $\ell = 3$. Пусть выбраны следующие параметры системы и управления: $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$, $w_0 = w_a = 0$, $T = 4$, $\gamma = 10^5$. Температура в третьем рабочем стержне переводится к заданной $w_T = -1$, $I_3 = (2,3)$. Расчет производился на однородной сетке ($t_m - t_{m-1} = T/M$, $z_n - z_{n-1} = \ell/N$). Параметры сетки: $K = 3$, $M = 4$, $N = 9$ ($N_u = 32$, $N_y = 888$).

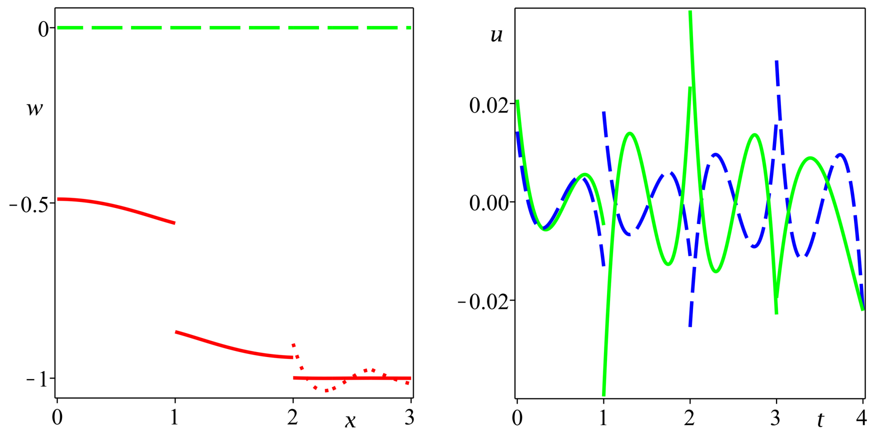

Рис. 2. Слева начальное $(w_0(\mathrm{x}))$ и терминальное $(w(T,x))$ распределение температуры, справа оптимальное управление $u_1(t)$ и $u_2(t)$

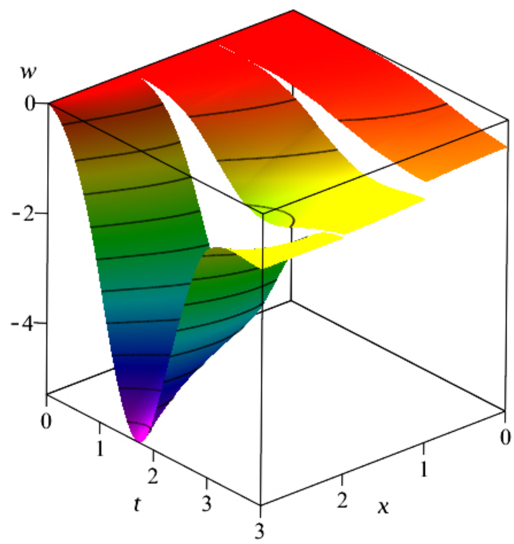

Рис. 3. Оптимальное распределение температуры $w(t,x)$

На Рис. 2–4 показаны результаты численного моделирования и оптимизации. На Рис. 2 (слева) штриховой линией отмечено начальное распределение температуры в цепи $w_0(x)$. Сплошные кривые показывают терминальную температуру $w(T,x)$ в каждом стержне. Для наглядности пунктирная кривая отмечает масштабированное отклонение температуры в третьем стержне $(w_T(x)+100(w(T,x)-w_T(x)))$. На Рис. 2 (справа) показано изменение во времени компонент вектора управления, а именно, тепловых потоков $u_1(t)$ (штриховые кривые) и $u_2(t)$ (сплошные кривые).

Соответствующее распределение температуры $w(t,x)$ в пространственно-временной области Ω, непрерывное везде кроме двух линий $x = x_1 = 1$ и $x = x_2 = 2$, показано на Рис. 3. Как видно из графика, выход на предписанный тепловой режим в рабочем стержне происходит через его предварительное переохлаждение в середине процесса управления. Как видно из Рис. 4, распределение $q(t,x)$ тепловых потоков через поперечные сечения непрерывно только по пространственной координате x и терпит разрывы в моменты переключения управления $t = t_m = m$, $m = 1, 2, 3$.

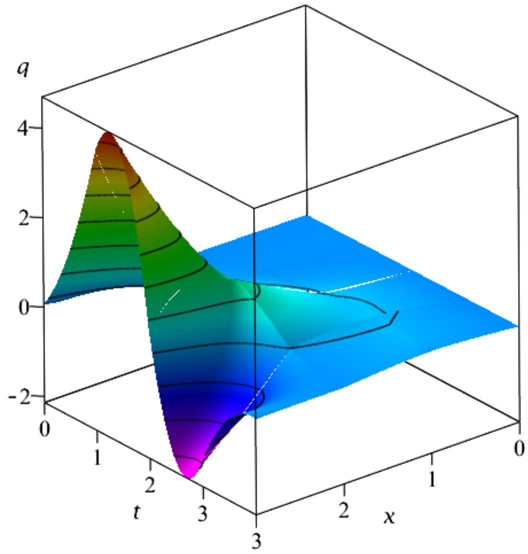

Рис. 4. Оптимальное распределение теплового потока $q(t,x)$

5. Заключение

Предложена обобщенная формулировка задачи оптимального управления термодинамическим процессом в конструкции, состоящей из тонких стержней, которые соеденены ЭП, создающими управляемые тепловые потоки. На фиксированном интервале времени минимизируется взвешенная сумма интеграла по времени от квадрата вектора управления и среднеквадратичного отклонения терминальных значений температуры одного из стержней от заданного распределения. Закон Фурье и закон теплообмена с окружающей средой задан в интегральном виде. Первый закон термодинамики, начальные распределения температуры, краевые и межэлементные условия являются существенными локальными ограничениями. Предложен конечно-элементный алгоритм построения полей температуры и тепловых потоков и их дальнейшей оптимизации.

Исследование выполнено по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700055-6).

Список литературы

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972.
3. Rauh A., Senkel L., Aschemann H., Saurin V., Kostin G. An integrodifferential approach to modeling, control, state estimation and optimization for heat transfer systems // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science (AMCS). 2016. Vol. 26, No. 1. P. 15–30.
4. Kostin G.V., Saurin V.V. Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
5. Kostin G. Optimization of thermodynamic processes in heat-conducting rods controlled by a Peltier element // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), 2022. IEEE Xplore Digital Library.