Перейдем к оценке числителя. Из определения гиперболических функций вытекает, что

$$|N_i(\tau)| = |b \sinh \lambda_i(1-\tau) + (\mu_i - \lambda_i)\cosh \lambda_i \tau - \mu_i \exp(-\lambda_i \tau)|.$$

Так как $\mu_i > \lambda_i > 0$,

$$|N_i(\tau)| \leqslant |b| \sinh \lambda_i + (\mu_i - \lambda_i)\cosh \lambda_i + \mu_i, \quad \tau \in [0,1].$$

После некоторых упрощений получаем оценку

$$|H_i(\tau)| \leqslant 4\left(\frac{1-\exp(-2\lambda_i)}{2} + \frac{\mu_i - \lambda_i}{|b|}\frac{1+\exp(-2\lambda_i)}{2} + \frac{\mu_i \exp(-\lambda_i)}{|b|}\right).$$

Остается отметить, что выражения $\mu_i - \lambda_i$ и $\mu_i \exp(-\lambda_i)$ стремятся к нулю с ростом i, что влечет их ограниченность. Более того, можно выбрать I_2 так, чтобы для любого $i \geqslant I_2$ одновременно выполнялись два неравенства: $\mu_i - \lambda_i \leqslant |b|$ и $\mu_i \exp(-\lambda_i) \leqslant |b|$. В итоге получаем, что $|H_i(\tau)| \leqslant 8$ для $i \geqslant I = \max\{I_1, I_2\}$.

Замечание 1. *Из доказанной теоремы следует, что в качестве равномерного приближения матрицы Ляпунова можно взять частичную сумму ряда* (9). *При этом, увеличивая число членов частичной суммы, мы можем получить приближение с любой точностью. Более того, погрешность аппроксимации можно строго оценить, используя неравенства из доказательства теоремы.*

Дополнительно стоит отметить, что ряд (9) сходится при всех $a > 0$ и $b \neq 0$, тогда как ряд (8) сходится только в случае экспоненциальной устойчивости системы (1).

6. Заключение

В данной работе представлен метод построения функционала полного типа для уравнения запаздывающего типа с распределенными параметрами. В случае экспоненциальной устойчивости системы представлен явный вид этого функционала, основанный на матрице Ляпунова. Для этой матрицы при $a > 0$ получена приближенная формула, случай $a < 0$ требует дополнительного исследования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИЗ ФИЗМАТЛИТ, 1959. 211 с.
2. Egorov A.V., Mondié S. A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 1. С. 106–115.
3. Kharitonov V.L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2013. 311 p.
4. Shuxia P. Asymptotic behavior of travelling fronts of the delayed Fisher equation // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2009. No. 10. P. 1173–1182.