УДК 517.929.4

АППРОКСИМАЦИЯ МАТРИЦЫ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

П.Е. Маковеева

Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

E-mail: st076937@student.spbu.ru

А.В. Егоров

Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

E-mail: alexey.egorov@spbu.ru

Ключевые слова: матрица Ляпунова, система с запаздыванием.

Аннотация: Метод функционалов Ляпунова-Красовского широко применяется для исследования устойчивости и робастной устойчивости. Важной частью этого метода является построение функциональной матрицы Ляпунова. В статье рассматривается уравнение запаздывающего типа с распределенными параметрами. По матрице Ляпунова строится функционал с наперед заданной квадратичной производной. Кроме того, дается приближенная формула для вычисления матрицы Ляпунова.

1. Введение

Сейчас достаточно большое количество моделей содержит дифференциальные уравнения запаздывающего типа. Важной задачей при их исследовании является анализ устойчивости решений. Один из методов был предложен Красовским [1]. Для систем с запаздыванием метод функционалов Ляпунова-Красовского представляет собой аналог классического критерия Ляпунова. Кроме уравнений с запаздыванием, широкое применение имеют уравнения в частных производных. В прикладных задачах нередко можно встретить уравнения параболического типа, хорошо известные из математической физики. Комбинация частных производных и запаздывания применяется, в частности, для анализа динамики некоторых популяций [4].

В данной работе для уравнения запаздывающего типа с распределенными параметрами строится функционал с наперед заданной неположительной производной. В основе функционала лежит введенная нами функциональная матрица Ляпунова. Предложен метод ее аппроксимации.

2. Математическая модель

Для моделирования динамики популяции [4] можно рассматривать систему, которая включает в себя уравнение в частных производных второго порядка, содержащее слагаемое с запаздывающим аргументом, однородные граничные условия, а также начальные условия:

$$\begin{cases} u_t(x,\ t) = au_{xx}(x,\ t) + bu(x, t-h), \quad x \in (0, l),\ t > 0, \\ u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,\ \theta) = \varphi(x,\ \theta), \quad \theta \in [-h, 0],\ x \in [0, l]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь φ – начальная функция, для простоты будем считать, что она абсолютно непрерывна, $a > 0$, $b \neq 0$ – параметры задачи, $h > 0$ – запаздывание. Далее будем полагать длину отрезка $l = 1$, так как задача может быть сведена к случаю $l = 1$ масштабированием координаты x.

3. Решение исходной системы

Рассматриваем систему (1). Для нахождения решения будем применять метод разделения переменных Фурье. Пусть $u(x,t) = f(x)g(t)$. Подставляя эту функцию в исходную систему (1), получаем пару уравнений. Первое – обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка, второе – дифференциально-разностное уравнение. После решения первого ОДУ с соответствующими граничными условиями получаем, что функция f имеет вид $f(x) = f_i(x) = \sin(\pi i x)$, $i \in \mathbb{N}$, а соответствующая функция g_i удовлетворяет уравнению

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mu_i g_i(t) + bg_i(t-h), \quad \text{где } \mu_i = a(\pi i)^2,\ t \geqslant 0,\ i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Решение системы (1) представимо в форме ряда

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t) \sin(\pi i x). \tag{3}$$

Для того чтобы решение удовлетворяло начальным условиям, необходимо потребовать, чтобы выполнялись равенства $g_i(\theta) = \varphi_i(\theta)$, $i \in \mathbb{N}$, где φ_1, φ_2, φ_3, … – коэффициенты разложения Фурье функции φ по синусам:

$$\varphi_i(\theta) = 2\int_0^1 \sin(\pi i x)\varphi(x,\theta)\,dx, \quad i \in \mathbb{N},\ \theta \in [-h, 0]. \tag{4}$$

Определение 1. *Фундаментальным решением уравнения* (2) *будем называть функцию* $K_i(t)$, $t \in [-h, \infty)$, *если она удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dK_i(t)}{dt} = -\mu_i K_i(t) + bK_i(t-h), \quad t > 0,$$

$K(t) = 0$ *для всех* $t \in [-h, 0)$, *и* $K(0) = 1$.

Через фундаментальную матрицу K_i можно выразить функцию g_i:

$$g_i(t) = K_i(t)\varphi_i(0) + b\int\limits_{-h}^{0} K_i(t-h-\theta)\varphi_i(\theta)\,d\theta, \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

Подставляем в уравнение (3) формулу (5). Решение системы (1) принимает вид

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin(\pi i x)\left[K_i(t)\varphi_i(0) + b\int\limits_{-h}^{0} K_i(t-h-\theta)\varphi_i(\theta)\,d\theta\right]. \tag{6}$$

Функция $u(\cdot,t,\varphi)$ принадлежит пространству Лебега $\mathcal{L}_2\big((0,1)\big)$.

4. Вычисление функционала v_0

Строим функционал v_0 с заданной неположительной квадратичной производной

$$\frac{d}{dt}v_0(\varphi) = -\left\|\varphi(\cdot,0)\right\|^2_{\mathcal{L}_2} = -\int\limits_0^1 \varphi^2(x,0)\,dx. \tag{7}$$

Доказательство следующей теоремы основано на интегрировании равенства (7) вдоль решений системы с учетом вида решения (6) и выражений (4).

Теорема 1. *Пусть система* (1) *экспоненциально устойчива. Если производная функционала вдоль решений системы задана равенством* (7), *то функционал имеет вид*

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) &= \int\limits_0^1 \varphi(y_1,0)\int\limits_0^1 U(0,y_1,y_2)\varphi(y_2,0)\,dy_2\,dy_1 \\ &+ 2b\int\limits_0^1 \varphi(y_1,0)\int\limits_0^1\int\limits_{-h}^{0} U(-h-\theta,y_1,y_2)\varphi(y_2,\theta)\,d\theta\,dy_2\,dy_1 \\ &+ b^2\int\limits_0^1\int\limits_{-h}^{0} \varphi(y_1,\theta_1)\int\limits_0^1\int\limits_{-h}^{0} U(\theta_1-\theta_2,y_1,y_2)\varphi(y_2,\theta_2)\,d\theta_2\,dy_2\,d\theta_1\,dy_1, \end{aligned}$$

где функция U, которую мы будем называть матрицей Ляпунова, для $\tau \in [-h,h]$, $y_1, y_2 \in [0,1]$ представима следующим образом:

$$U(\tau,y_1,y_2) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \sin(\pi i y_1)\sin(\pi i y_2)\int\limits_0^{\infty} K_i(t)K_i(t+\tau)\,dt. \tag{8}$$

5. Матрица Ляпунова

Как видно из представленной теоремы, ключевую роль в построении функционала полного типа v_0 играет матрица Ляпунова U. Вычислить ее непосредственно по формуле (8) весьма затруднительно. Следующая теорема существенно упрощает задачу. Для простоты здесь мы рассматриваем случай $h = 1$, к которому исходная задача может быть сведена при помощи масштабирования времени.

Теорема 2. *Матрица Ляпунова* (8) *представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося на множестве* $\{\tau \in [-1, 1],\ y_1, y_2 \in [0, 1]\}$ *ряда*

$$U(\tau, y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin(\pi i y_1) \sin(\pi i y_2)\, u_i(|\tau|). \tag{9}$$

Здесь каждая из функций $u_i(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$, *определяется соответствующей формулой из теоремы 2 в статье [2], где в качестве параметра a берется число* $-\mu_i$. *В частности, для достаточно больших* i, *при которых* $\mu_i > |b|$ *и* $|b| \cosh \lambda_i > \mu_i$, *где* $\lambda_i = \sqrt{\mu_i^2 - b^2}$,

$$u_i(\tau) = \frac{b \sinh \lambda_i (1 - \tau) + \mu_i \sinh \lambda_i \tau - \lambda_i \cosh \lambda_i \tau}{\lambda_i (b \cosh \lambda_i - \mu_i)}, \quad \tau \in [0, 1].$$

Доказательство. То, что

$$2 \int_0^{\infty} K_i(t) K_i(t + \tau)\, dt = u_i(|\tau|),$$

напрямую следует из результатов, представленных в статье [2], так как там выводится явная формула для матрицы Ляпунова для уравнения с запаздыванием вида (2) без частных производных, а как известно из работы [3], такая матрица определяется искомым несобственным интегралом.

Остается доказать равномерную абсолютную сходимость ряда. Учитывая равномерную ограниченность синуса, по теореме Вейерштрасса для этого достаточно, чтобы при бесконечно возрастающем i выполнялось соотношение $\max_{\tau \in [0,1]} u_i(\tau) = O(i^{-2})$. Заметим, что $\lambda_i = O(i^2)$. Таким образом, остается доказать равномерную по τ и по i ограниченность следующего выражения

$$H_i(\tau) = \frac{N_i(\tau)}{D_i} = \frac{b \sinh \lambda_i (1 - \tau) + \mu_i \sinh \lambda_i \tau - \lambda_i \cosh \lambda_i \tau}{b \cosh \lambda_i - \mu_i} \tag{10}$$

при достаточно больших i.

Распишем гиперболические функции по определению и рассмотрим сперва знаменатель дроби (10). Оценим его по модулю снизу. Заметим, что существует I_1 такая, что для всех $i \geqslant I_1$ верно, что $\frac{|b| \exp(\lambda_i)}{2} \geqslant |b \exp(-\lambda_i) - 2\mu_i|$. В итоге имеем оценку знаменателя

$$|D_i| = \left| b \frac{\exp(\lambda_i) + \exp(-\lambda_i)}{2} - \mu_i \right| \geqslant \frac{|b| \exp(\lambda_i)}{4}.$$

Перейдем к оценке числителя. Из определения гиперболических функций вытекает, что

$$|N_i(\tau)| = |b \sinh \lambda_i (1-\tau) + (\mu_i - \lambda_i) \cosh \lambda_i \tau - \mu_i \exp(-\lambda_i \tau)|.$$

Так как $\mu_i > \lambda_i > 0$,

$$|N_i(\tau)| \leqslant |b| \sinh \lambda_i + (\mu_i - \lambda_i) \cosh \lambda_i + \mu_i, \quad \tau \in [0,1].$$

После некоторых упрощений получаем оценку

$$|H_i(\tau)| \leqslant 4 \left(\frac{1-\exp(-2\lambda_i)}{2} + \frac{\mu_i - \lambda_i}{|b|} \frac{1+\exp(-2\lambda_i)}{2} + \frac{\mu_i \exp(-\lambda_i)}{|b|} \right).$$

Остается отметить, что выражения $\mu_i - \lambda_i$ и $\mu_i \exp(-\lambda_i)$ стремятся к нулю с ростом i, что влечет их ограниченность. Более того, можно выбрать I_2 так, чтобы для любого $i \geqslant I_2$ одновременно выполнялись два неравенства: $\mu_i - \lambda_i \leqslant |b|$ и $\mu_i \exp(-\lambda_i) \leqslant |b|$. В итоге получаем, что $|H_i(\tau)| \leqslant 8$ для $i \geqslant I = \max\{I_1, I_2\}$.

Замечание 1. *Из доказанной теоремы следует, что в качестве равномерного приближения матрицы Ляпунова можно взять частичную сумму ряда* (9). *При этом, увеличивая число членов частичной суммы, мы можем получить приближение с любой точностью. Более того, погрешность аппроксимации можно строго оценить, используя неравенства из доказательства теоремы.*

Дополнительно стоит отметить, что ряд (9) сходится при всех $a > 0$ и $b \neq 0$, тогда как ряд (8) сходится только в случае экспоненциальной устойчивости системы (1).

6. Заключение

В данной работе представлен метод построения функционала полного типа для уравнения запаздывающего типа с распределенными параметрами. В случае экспоненциальной устойчивости системы представлен явный вид этого функционала, основанный на матрице Ляпунова. Для этой матрицы при $a > 0$ получена приближенная формула, случай $a < 0$ требует дополнительного исследования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, https://rscf.ru/project/23-71-10099.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: ГИЗ ФИЗМАТЛИТ, 1959. 211 с.
2. Egorov A.V., Mondié S. A stability criterion for the single delay equation in terms of the Lyapunov matrix // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 1. С. 106–115.
3. Kharitonov V.L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2013. 311 p.
4. Shuxia P. Asymptotic behavior of travelling fronts of the delayed Fisher equation // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2009. No. 10. P. 1173–1182.