УДК 517.977

ВЫПУКЛОСТЬ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ В ИССЛЕДОВАНИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

И.С. Максимова

Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Россия, 117198, Москва, Миклухо-Маклая ул., 6

E-mail: maximova-is@rudn.ru

Ключевые слова: задачи управляемости со сменой фазового пространтсва, задачи с переменной структурой, множество достижимости, многозначное отображение, опорная функция, управляемость.

Аннотация: В данной работе получены достаточные условия управляемости дифференциальных систем в задаче с переменной структурой. Рассмотрены подходы к исследованию как нелинейных, так и линейных систем. Условия управляемости для нелинейного случая получены с помощью аппарата выпуклого анализа, теории многозначных отображений и теории управляемости.

1. Введение

Задачи со сменой фазового пространства или задачи с переменной структурой характеризуются тем, что на последовательных отрезках времени движение объекта описывается различными системами дифференциальных уравнений. Рассматривается задача управляемости объекта, описанного нелинейными системами, из начального множества одного пространства в конечное множество другого пространства через «гиперповерхность перехода». Переход объекта из одного пространства в другое задается некоторым отображением.

Смена фазовых пространств может возникать при математическом моделировании сложных динамических систем, например, крупных производственных комплексов, многостадийных технологических процессов. Последовательностью сменяющихся друг друга стадий характеризуется также процесс управления системой химических реакторов, модели динамики метапопуляций, экономические системы с переменной структурой. При моделировании этих процессов используются динамические системы, размерность которых, в зависимости от состояния, может изменяться с течением времени, т.е. происходит динамическая декомпозиция сложной системы. Возможность использования систем с переменной размерностью при моделировании динамики биологических сообществ указывалась в работе [1] Ю.М. Свирежева.

2. Постановка задачи

Имеются два фазовых пространства $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_m)$. Обозначим $\Omega(\mathbb{R}^n)$, $\Omega(\mathbb{R}^m)$ – совокупности всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно. Пусть заданы множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0, \tau]; \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t), v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau, T]. \tag{2}$$

Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in L_\infty([0, \tau], R^n)$, $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], R^m)$, для которых $u(t) \in U$ при п.в. $t \in [0, \tau]$ и $v(t) \in V$ при п.в. $t \in [\tau, T]$. Решениями систем (1) и (2) при $t \in [0, \tau]$ и $t \in [\tau, T]$ называются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$ системам (1) и (2) соответственно. Пусть функции $f(t, x, u)$, $g(t, y, v)$ таковы, решение задачи Коши для систем (1) и (2) существует и единственно.

В X заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая «гиперповерхность перехода» Γ. Пусть τ – наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Γ. Когда объект, движущийся по закону (1), достигает гиперповерхности Γ, происходит переход в пространство Y, заданный некоторым линейным отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (2). Наконец, в Y задано конечное множество $M_1 \in \Omega(\mathbb{R}^m)$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$). Подобная схема движения объекта изучена например в [2].

Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (1) и (2), будет управляемым из M_0 в M_1. Объект, описываемый системами (1) и (2), называется управляемым из M_0 в M_1, [8] если существуют такие допустимые управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Для системы (1) в фазовом пространстве $X = \mathbb{R}^n$ в точке x рассмотрим множество $f(t, x, U)$, состоящее из всех векторов $f(t, x, u)$, где u принадлежит множеству U. Если $x(t)$ – некоторая траектория системы (1), соответствующая допустимому управлению $u(t)$, то при почти всех $t \in [0, \tau]$ выполняется включение

$$\dot{x}(t) \in f(t, x(t), U). \tag{3}$$

Это приводит нас к дифференциальному включению

$$\dot{x} \in f(t, x, U). \tag{4}$$

Под решением дифференциального включения (4) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, определенная на интервале $[0, \tau]$, удовлетворяющая включению (3) при почти всех $t \in [0, \tau]$.

Итак, при довольно общих предположениях система (1) эквивалентна дифференциальному включению (4), т.е. для любого решения $x(\cdot)$ включения (4) существует такое допустимое управление $u(\cdot)$, что функция $x(\cdot)$ будет являться траекторией системы (1) с этим управлением $u(\cdot)$. Этот вопрос довольно подробно рассматривается в [7].

Теперь, при сделанных замечаниях, вместо нелинейной системы (1) будем рассматривать дифференциальное включение (4). Обозначим $f(t,x,U)$ через $F(t,x)$, тогда в пространстве $X = \mathbb{R}^n$ движение управляемого объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad t \in [0,\tau], \tag{5}$$

где $F(t,x)$ – многозначное отображение. Аналогично в пространстве $Y = \mathbb{R}^m$ движение управляемого объекта вместо нелинейной системы (2) описывается включением

$$\dot{y} \in G(t,y), \quad t \in [\tau,T]. \tag{6}$$

Движение объекта из пространства X в пространство Y осуществляется по схеме, описанной выше.

3. Основной результат

Определение [6]. *Многозначное отображение $F(t,x)$ называется вогнутым по x на множестве M, если для любых точек $x_1, x_2 \in M$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполняется условие*

$$\lambda F(t,x_1) + (1-\lambda)F(t,x_2) \subset F(t, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Заметим, что из этого условия следует (см., например, [6]) выпуклость множества $F(t,x)$ при каждом $x \in M$. Множество достижимости $K(t)$ для каждого $t \in [0,\tau]$ состоит из всех точек $x(t) \in \mathbb{R}^n$, где $x(t)$ – решение включения (5) с начальным условием $x(0) \in M_0$.

Происхождение термина «вогнутость многозначного отображения» связано с тем обстоятельством, что в этом случае опорная функция

$$c(F(t,x),\psi) = \max_{f \in F(t,x)} (f,\psi)$$

является вогнутой функцией по переменной x для любого сопряженного вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ (см. [5]).

Если многозначное отображение $F(t,x)$ вогнуто по x на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, то оно является линейным по переменной x, т.е. представимо в виде

$$F(t,x) = A(t)x + F(t,0),$$

где $A(t)$ – некоторая матрица.

Рассмотрим движение объекта в пространстве X из начального множества M_0 до «гиперповерхности перехода» Г. Предположим, что отображение $F(t,x)$ вогнуто по x на множестве достижимости $K(\tau)$ при всех $t \in [0,\tau]$. Известно (см. [6]), что в этом случае семейство всех решений на отрезке $[0,\tau]$ с начальным условием $x(0) \in M_0$ будет выпуклым множеством в пространстве $C[0,\tau]$.

Выпуклость семейства решений дифференциального включения впервые была получена В.И. Благодатским в работе [4] и в более полном виде содержится в обзоре [6].

Из выпуклости семейства решений следует выпуклость множества достижимости $K(\tau)$. Обратное утверждение не выполняется, например, для линейных управляемых систем

$$\dot{x} = Ax + u, u \in U.$$

Для них множество достижимости всегда выпукло, если начальное множество является выпуклым, а семейство решений выпукло лишь при условии выпуклости множества U.

Если семейство решений выпукло в пространстве $C[0,\tau]$, то каждое множество достижимости $K(\tau)$ также будет выпуклым в пространсве $\mathbb{R}^n$.

Итак, при сделанных предположениях, множество достижимости $K(\tau)$ выпукло. Пересекая его с «гиперповерхностью перехода» Γ, получим множество

$$K_1(\tau) = K(\tau) \cap \Gamma.$$

Предположим, что существует τ такое, что $K_1(\tau) \neq \varnothing$. Тогда $K_1(\tau)$ является выпуклым, как пересечение двух выпуклых множеств. Преобразуем множество $K_1(\tau)$ следующим образом: $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$. Полученное множество $K_2(\tau)$ выпукло в силу свойств отображения q. Множество $K_2(\tau)$ является начальным множеством при движении объекта в пространстве Y в множество M_1.

В пространсве Y мы получили следующую задачу управляемости: является ли система (2) управляемой из множества $K_2(\tau)$ в множество M_1 на отрезке времени $[\tau, T]$. Обозначим через $K_3(T)$ множество достижимости системы (2) из $K_2(\tau)$ в момент времени T. Предположим, что отображение $G(t,y)$ вогнуто по y на множестве достижимости $K_3(T)$ и $K_3(T)$ компактно. Тогда, для управляемости системы (2) будет достаточно, чтобы $K_3(T) \cap M_1 \neq \varnothing$ или по свойству опорных функций $c(K_3(T),\psi) + c(M_1,-\psi) \geqslant 0$, для любого $\psi \in \mathbb{R}^m$ (см. [3]).

Итак, условия управляемости из множесва M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y для систем (1) и (2) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены все сделанные выше предположения. Тогда для управляемости объекта, описываемого системами (1) и (2), на отрезке времени* $[0,T]$ *достаточно, чтобы было выполнено следующее соотношение* $c(K_3(T),\psi) + c(M_1,-\psi) \geqslant 0$, *для любого* $\psi \in \mathbb{R}^m$.

Заметим, что для автономной системы (2) можно рассматривать движение объекта в пространстве Y в «обратном времени» и выписывать множество достижимости $K_4(T)$ из множества M_1 на «гиперповерхность перехода» Γ. Тогда условием управляемости для систем (1) и (2) на отрезке времени $[0,T]$ будет непустое пересечение множеств $K_4(T)$ и $K_2(\tau)$.

Список литературы

1. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987, 368 с.
2. Болтянский В.Г. Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференциальные уравнения. 1983, Т. XIX, № 3. С. 518–521.
3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высшая школа, 2001.
4. Благодатских В. И. О выпуклости сфер достижимости // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 12. С. 2149–2155.
5. Благодатских В. И., Ндии П. Выпуклость множества решений дифференциального включения // Вестник Моск.университета. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернентика 1998. № 3. С. 21–22.
6. Благодатских В. И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
7. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Либроком, 2011.
8. Maximova, I. The Problem of Controllability with Phase Space Change. // Advances in Systems Science and Applications, 2023. Vol. 23, No. 1. P. 61–68.