УДК 51.76

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИГНАЛОВ В ЦЕПЯХ И КОЛЬЦЕВЫХ СЕТЯХ ИЗ ПОРОГОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О.П. Кузнецов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: olpkuz@yandex.ru

Ключевые слова: пороговый элемент, цепь, кольцо, распространение сигнала, затухание сигнала.

Аннотация: Рассматриваются процессы распространения сигналов в цепях и кольцевых структурах из асинхронных пороговых элементов. Элемент может находиться в активном либо пассивном состоянии: если его потенциал превышает порог, он активен. Цепь – это сеть из элементов N_1, …, N_n, в которой единственный выход N_i соединен с единственным входом N_{i+1}. Кольцо получается из цепи соединением выхода N_n со входом N_1. Для цепи найдены условия, при которых длительность сигнала может сохраняться, увеличиваться или уменьшаться. В последнем случае сигнал в достаточно длинной цепи затухает. Для кольца приведены условия, при которых оно превращается в систему двухфазных осцилляторов.

1. Введение

В работе [1] было рассмотрено распространение сигналов в цепях из однородных (имеющих одинаковые параметры) пороговых элементов. Возможны три случая: 1) сигнал, проходя по цепи, сохраняет длительность; 2) длительность сигнала уменьшается, и в достаточно длинной цепи сигнал затухает, т.е. не дойдет до последнего элемента; 3) длительность сигнала увеличивается. Здесь исследуется распространение сигналов в сетях с циклической структурой, т.е. имеющих вид кольца: цепи, у которой выход последнего элемента соединен со входом первого элемента. Поскольку в случае кольца используются понятия и результаты для цепи, сначала мы их напомним.

2. Основные определения. Распространение сигнала в цепи

Асинхронный пороговый элемент N_i – это элемент, состояние которого $y_i(t)$ определяется значением его *потенциала* $U_i(t)$, изменяющегося в интервале $U_{i0} \le U_i(t) \le U_{i\max}$, и *порогом* P_i, лежащим в том же интервале:

$$y_i(t) = \begin{cases} 1, \text{если } U_i(t) \ge P_i \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

В активном состоянии ($y_i(t) = 1$) элемент N_i генерирует сигнал мощности d_i. Другие параметры элемента – веса w_{ij} входов (i – номер элемента, j – номер входа) и две эндогенные скорости изменения потенциала (v_{ien}^0 для пассивного и v_{ien}^1 для активного состояния), не зависящие от внешних воздействий. Элемент называется реактивным, если обе эндогенные скорости отрицательны. Он активируется только при наличии достаточно сильных внешних воздействий; при их отсутствии его потенциал стремится к U_{i0}. Асинхронным элемент называется потому, что на прохождение сигнала через него существенно влияют переходные процессы включения и отключения.

Однородные асинхронные цепи из реактивных элементов N_1, …, N_n – это сети, в которых 1) выход N_i соединен с единственным входом N_{i+1}, $i = 1, …, n – 1$; 2) вход N_1 и выход N_n – внешние для цепи; 3) значения параметров U_{i0}, $U_{i\max}$, v_{ien}^0, v_{ien}^1, d_i для любого элемента одинаковы; поэтому индекс i опускаем. Пример таблицы, задающей параметры цепи, приведен в табл.1. N_0 – внешний источник возбуждения.

Таблица 1. Пример задания параметров.

	P	$U_{\max}$	U_0	v_{en}^0	v_{en}^1	d	w
N_0						1,0	
N_i	0,5	0,9	0	-0,8	-0,5	1,0	1,0

Входное воздействие (*сигнал*) подается на вход N_1. Сигнал проходит через элемент, если через некоторое время после поступления сигнала элемент активируется и генерирует выходной сигнал. Сигнал приходит на элемент N_i, если активен N_{i-1}; в результате потенциал N_i начинает изменяться со скоростью v_i, определяемой следующим образом:

$v_i(t) = s_i(t) + v_{\mathrm{en}}^0 = wdy_{i-1}(t) + v_{\mathrm{en}}^0$, если элемент пассивен (потенциал ниже порога),

и

$v_i(t) = s_i(t) + v_{\mathrm{en}}^1 = wdy_{i-1}(t) + v_{\mathrm{en}}^1$, если элемент активен, где $wdy_{i-1}(t)$ – экзогенная скорость, определяемая мощностью d сигнала и весом w входа N_i.

Знак скорости означает направление изменения (рост или падение) потенциала. Очевидно, что для прохождения сигнала через элемент необходимо условие $s_i(t) > |v_{\mathrm{en}}^0|$.

События в цепи – это моменты изменения состояния какого-либо элемента, а также моменты достижения U_0 и $U_{\max}$. Они представлены точками на шкале непрерывного времени, разбивающими шкалу на такты. Границы тактов нумеруются натуральными числами 0, 1, … и называются дискретными моментами времени. Такт t – это полуинтервал $[t, t + 1)$; его длительность обозначается $\tau(t)$. Последовательность событий называется *протоколом* функционирования цепи. *Внешнее состояние цепи* – это вектор $Y(t)= (y_1(t), …, y_n(t)$; ее *внутреннее состояние* – вектор $U(t)= (U_1(t), …, U_n(t))$.

При отсутствии внешнего сигнала элементы цепи имеют потенциал U_0. При подаче сигнала достаточной длительности элемент N_1 переходит в активное состояние и генерирует выходной сигнал, запуская процесс распространения сигнала по цепи. При этом возможны три случая, описанные во введении. В [1] найдены условия, при которых имеет место тот или иной из трех случаев (см. ниже таблицу 2).

На рис. 1 представлена временная диаграмма функционирования цепи, параметры которой заданы таблицей 1, при длительности входного сигнала $Q_0 = 4{,}5$. Жирными линиями обозначены периоды активности элементов. Сигнал не проходит уже через третий элемент: длительности активности N_2 недостаточно, чтобы N_3 успел включиться. Вертикальные линии соответствуют границам тактов. События могут совпадать: например, включение N_1 совпадает с началом роста потенциала N_2.

Рассмотрим структуру процесса функционирования элемента N_i. Цикл включения-отключения N_i, который начинается с подачи входного сигнала, назовем *полным*, если он состоит из 5 фаз (см. график для N_1 на рис.1): 1) зарядки (роста потенциала от U_0 до

P, 2) роста потенциала от P до U_{max}; 3) пребывания потенциала в точке U_{max}; 4) разрядки (уменьшения потенциала от U_{max} до P); 5) падения потенциала до U_0. Обозначим длительности этих фаз через q_{1i}, q_{2i}, q_{3i}, q_{4i}, q_{5i}, где $i = 1, \ldots, n$ – номер элемента. Фазы 1 и 2 называются *полными в данном цикле*, если за ними следуют фазы 2 и 3, соответственно; фазы 4 и 5 полны, если им предшествуют фазы 3 и 4, соответственно. Без нарушения общности считаем, что мощность d_0 внешнего сигнала равна d. В любом случае, начиная с выхода первого элемента, по цепи будет распространяться сигнал мощности d. Поэтому, если $d_0 \neq d$, полученные результаты верны для цепи, где N_1 является внешним источником, а цепь начинается с элемента N_2. Далее, Q_0 – длительность внешнего сигнала; Q_i – длительность активности N_i и его выходного сигнала, t_{ji} – момент начала фазы j элементаN_i, t_{zi} – момент падения U_i до U_0. Для внешнего сигнала $t_{00} = 0$ – момент его начала, t_{z0} – момент его окончания. Некоторые события совпадают: например, $t_{z0} = t_{41}$.

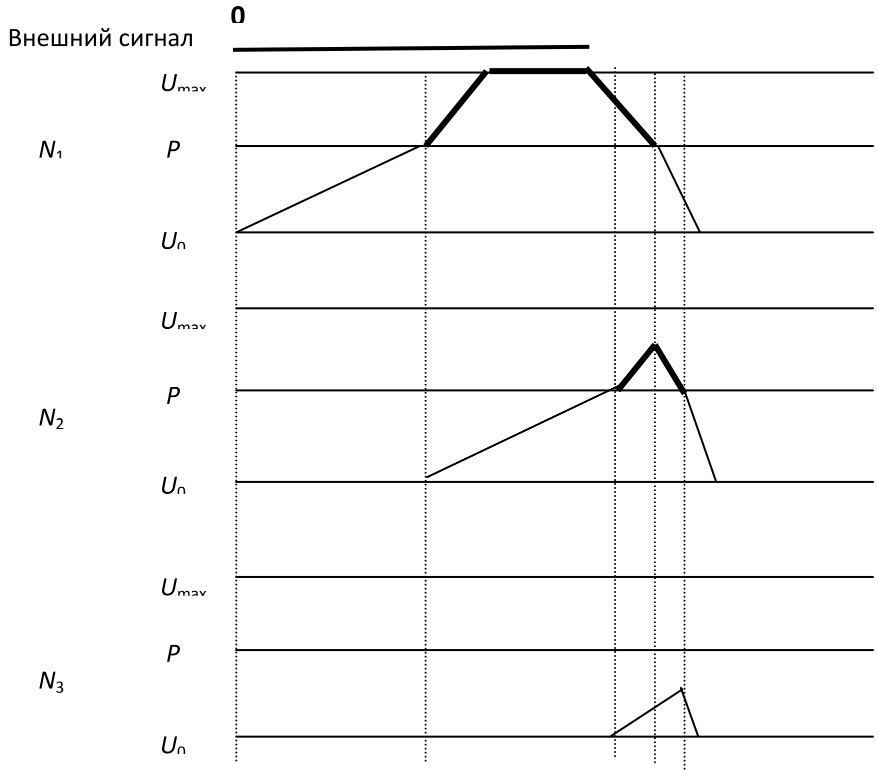

Рис. 1. Временная диаграмма распространения сигнала по цепи из 3 элементов.

Сигнал называется *длинным*, если $Q_i \geq q_1 + q_2$, *коротким*, если $q_1 < Q_i < q_1 + q_2$, *недостаточным*, если $Q_i \leq q_1$. При длинном сигнале элемент достигает U_{max} и тем самым фазы 3; при коротком сигнале элемент активируется, но достичь фазы 3 не успевает; при недостаточном сигнале потенциал элемента не достигает порога, элемент не активируется и не генерирует сигнал.

Основные результаты распространения сигнала по цепи содержатся в таблице 2. Упомянутая в ней точка равновесия – это такая величина $\varepsilon^* \leq q_2$, что внешний сигнал длительности $q_1 + \varepsilon^*$ (равновесный) проходит по цепи без изменения длительности.

Таблица 2. Распространение сигнала по цепи при различных соотношениях q_1 и q_4.

<table>
<tr><td>Сигнал \ элемент</td><td>Тип 1: $q_1 = q_4$</td><td>Тип 2: $q_1 < q_4$</td><td>Тип 3: $q_1 > q_4$</td></tr>
<tr><td>Длинный</td><td>Проходит с сохранением длительности</td><td>Проходит с увеличением длительности</td><td rowspan="2">Укорачивается; не проходит при длине цепи $n < z_1$</td></tr>
<tr><td>Короткий</td><td>Укорачивается; не проходит при длине цепи $n < z_2$;</td><td>Есть точка равновесия:
1) равновесный сигнал проходит с сохранением длительности;
2) сигнал короче равновесного не проходит при длине цепи $n < z_2$;
3)сигнал длиннее равновесного проходит с увеличением длительности</td></tr>
<tr><td>Недостаточный</td><td colspan="3">Не проходит через первый элемент</td></tr>
</table>

3. Распространение сигнала в кольце

Однородное кольцо из реактивных элементов $N_1, \ldots, N_n$ – это сеть, полученная из однородной цепи присоединением выхода последнего элемента ко входу первого элемента. Поэтому при анализе распространения сигнала по кольцу понадобятся определения и результаты предыдущего раздела.

Длительностью Q_{c1} первого цикла считается время от прихода внешнего сигнала на вход N_1 до активации N_n, т.е. до момента, в который в цепи сигнал достиг бы $(n + 1)$-го элемента; в кольце он поступит на вход N_1. В дальнейшем ограничимся случаем, когда сигнал длинный и $q_1 = q_4$. Тогда длительность сигнала Q_0 в первом цикле сохраняется; для всех элементов существует фаза 3 и сумма $S_q(N_1)$ всех фаз элемента N_1 равна $S_q(N_1) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = Q_0 + q_4 + q_5 = Q_0 + q_1 + q_5$. Кроме того, выходной сигнал от N_i, $i = 1, \ldots, n$ начинается в момент $iq_4 = iq_1$ и заканчивается в момент $Q_0 + iq_4$. Поэтому $Q_{c1} = nq_1$, а значение $U_1(nq_1)$ зависит от длительности Q_0.

a. $nq_1 \le Q_0$. В этом случае внешний сигнал длится на протяжении всего первого цикла, т.е. прохождения сигнала по всему кольцу. Поэтому элемент N_1 будет активен на временном отрезке $[q_1, nq_1]$, элемент N_i, $i = 2, \ldots, n - 1$, будет активен на отрезке $[iq_1, nq_1]$, элемент N_n будет активен в момент nq_1. Таким образом, активность N_1 на протяжении первого цикла обеспечивает активность всех элементов кольца на момент nq_1 окончания первого цикла.

Поскольку длительность сигнала от N_n равна $Q_0 \ge nq_1$, а $U_1(nq_1) = U_{\max}$, то N_1 будет активен на временном отрезке $[nq_1, 2nq_1]$. Иначе говоря, N_1 будет непрерывно активен на отрезке $[q_1, 2nq_1]$. Так как активность N_2 не может закончиться раньше активности N_1, …, активность N_n не может закончиться раньше активности N_{n-1}, то на протяжении всего отрезка $[nq_1, 2nq_1]$ все элементы кольца по-прежнему будут активны. Продолжая это рассуждение, получим, что активность N_1 на отрезке $[inq_1, (i + 1)nq_1]$ обеспечивает активность всех элементов кольца к моменту $(i + 1)nq_1$, что в свою очередь обеспечивает активность N_1 на отрезке $[i + 1)nq_1, (i + 2)nq_1]$. В результате все элементы кольца будут активны бесконечно долго, начиная с момента nq_1 (момента активации N_n).

b. $Q_0 \le nq_1 \le Q_0 + q_1$. В этом случае внешний сигнал заканчивается раньше момента nq_1 активации N_n, однако момент nq_1 наступает раньше момента $Q_0 + q_4 = Q_0 + q_1$, когда активность N_1 должна была бы закончиться. Поэтому передний фронт сигнала от N_n застанет N_1 в фазе q_4, когда он еще активен. Следовательно, активность N_1 продлится на отрезке $[nq_1, 2nq_1]$, т.е. повторяется ситуация случая a. Поэтому и в случае b все элементы кольца будут активны бесконечно долго, начиная с момента nq_1 (момента активации N_n).

c. $nq_1 = Q_0 + q_1 + q_5 + q_x$. В этом случае передний фронт сигнала от N_n придет на вход N_1, когда $U_1(nq_1) = U_0$. Эта ситуация в точности повторяет ситуацию первого цикла, с той разницей, что роль внешнего сигнала для N_1 играет сигнал от N_n с той же длительностью Q_0, а q_x – это отрезок между моментом, когда потенциал N_1 достиг U_0, и моментом nq_1.

Поэтому структура второго цикла для N_1 совпадет со структурой первого цикла, представляющего собой последовательность отрезков $[q_1, Q_0, q_5, q_x]$ и будет повторяться бесконечно. Таким образом, кольцо из асинхронных пороговых элементов превращается в систему двухфазных осцилляторов, где длительность периода равна nq_1, длительность единичной фазы (фазы активности) равна Q_0, а длительность нулевой фазы равна $q_5 + q_x + q_1 = nq_1 - Q_0$, причем для N_1 единичная фаза в первом цикле начинается в момент q_1, а для каждого последующего элемента она сдвигается на q_1. Для кольца из трех элементов этот случай проиллюстрирован на рис. 2.

d. $Q_0 + q_1 \leq nq_1 = Q_0 + q_1 + q_{15}$, где q_{15} – длительность укороченной фазы 5 элемента N_1. В этом случае передний фронт сигнала от N_n застанет N_1 в фазе q_5, когда он уже отключен, но еще не достиг U_0. Эта фаза завершает первый цикл.

Фаза 1 для N_1, начинающая второй цикл, также будет меньше полной; ее длительность обозначим q_{11}. Во второй раз N_1 активизируется в момент $Q_0 + q_1 + q_{15} + q_{11}$.

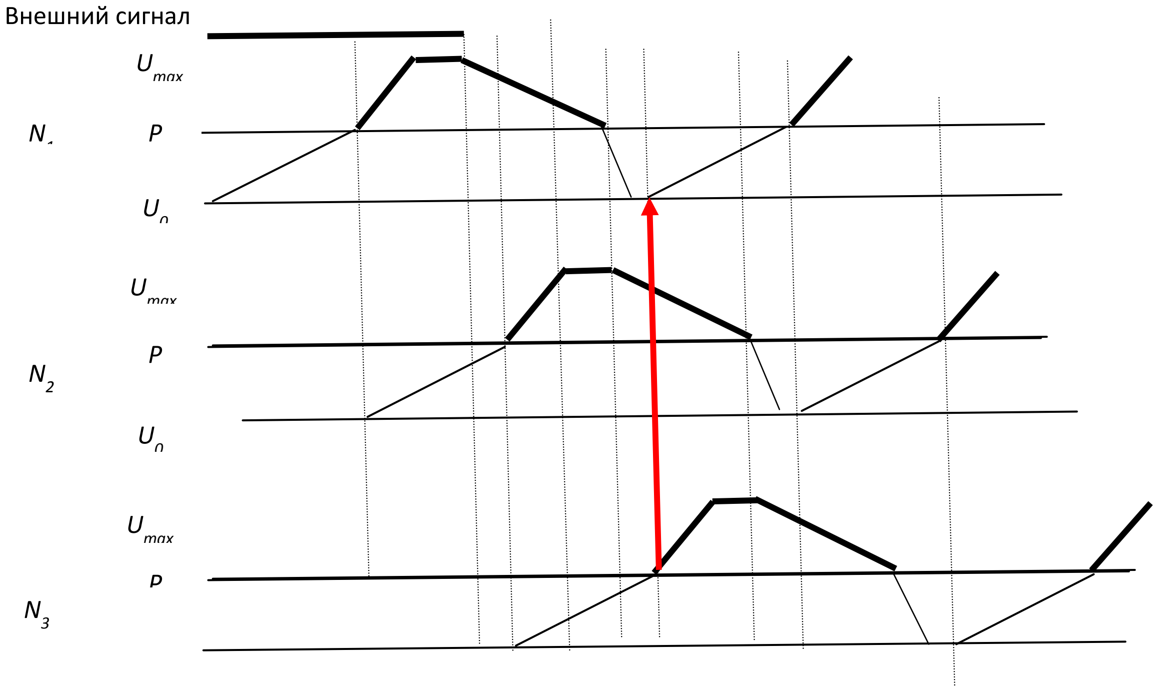

Рис. 2. Случай c для кольца из 3 элементов. Красная стрелка показывает начало второго цикла.

Активность N_2 в первом цикле начинается в момент $2q_1$ и должна закончиться в момент $2q_1 + Q_0$, но только при условии $2q_1 + Q_0 < Q_0 + q_1 + q_{15} + q_{11}$, что равносильно

(1) $q_1 < q_{15} + q_{11}$.

Сумма $q_{15} + q_{11}$ – это длительность паузы между двумя активностями N_1. В укороченной фазе 5 потенциал N_1 падал со скоростью $|v_{\text{en}}^0|$ и достиг величины $x > 0$. Поэтому $q_{15} = (P - x)/\ |v_{\text{en}}^0|$. После окончания q_{15} начинается рост потенциала N_1 со скоростью $wd - |v_{\text{en}}^0|$; поэтому $q_{11} = (P - x)/(wd - |v_{\text{en}}^0|)$. Кроме того, $q_1 = P/(wd - |v_{\text{en}}^0|)$. Подставив выражения для q_1, q_{15} и q_{11} в (1), после преобразований получим

(2) $x < P(1 - (|v_{\mathrm{en}}^{0}|/\, wd))$.

Неравенство (2) – это условие того, что активность N_2 в первом цикле закончится раньше, чем начнется повторная активность N_1. При его выполнении структура активности N_1 имеет вид $q_1 + Q_0 + q_{15} + q_{11} + Q_0$, а структура активности N_2 имеет вид $2q_1 + Q_0 + q_{25} + q_{21} + Q_0$. При этом выполняется равенство $q_1 + Q_0 + q_{15} + q_{11} = 2q_1 + Q_0 + q_{25}$, так как начало q_{21} совпадает с концом q_{11}. Отсюда $q_{15} + q_{11} = q_1 + q_{25}$. Так как $q_{21} < q_1$, то $q_{25} + q_{21} < q_1 + q_{25} = q_{15} + q_{11}$. Таким образом, пауза между активностями N_2 меньше паузы между активностями N_1. Для последующих элементов эта пауза будет уменьшаться и при достаточно большом числе элементов в кольце возникнет ситуация случая а.

3. Заключение

Полученные результаты можно использовать в нейробиологии при анализе распространения сигналов в нервных системах [2].

Список литературы

1. Кузнецов О.П. Об условиях прохождения сигнала через цепь асинхронных пороговых элементов // Автоматика и телемеханика. 2022. № 6. С. 118-135.
2. Feinerman O., Segal M., Moses E. Signal Propagation Along Unidimensional Neuronal Networks // J. Neurophysiolog. 2005. Vol. 94, No. 5. P. 3406-3416.