УДК 517.977

ПОИСК ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ С НАИЛУЧШИМ КАЧЕСТВОМ УПРАВЛЕНИЯ

А.Д. Пирогова
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д.5
E-mail: pirogova_arina@mail.ru

В.Н. Четвериков
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д.5
E-mail: chetverikov.vl@yandex.ru

Ключевые слова: критерий качества управления, робототехника, случайная величина, математическое ожидание.

Аннотация: В работе ставится задача оптимального выбора параметров модели относительно заданного функционала. Рассматриваются локально управляемые системы и интегральные функционалы, зависящие от программного управления. Для сравнения моделей с разными значениями параметров используется математическое ожидание значения функции, определяющей функционал, в предположении, что любой достаточно малый сдвиг из начального состояния возможен и равновероятен.

1. Введение

Задача, исследуемая нами далее, возникает, например, при построении автономных необитаемых подводных аппаратов. Существующие такие аппараты отличаются размерами, формой, областью применения, видами и расположением управляющих агрегатов и т.д. Задача выбора аппарата, оптимального в том или ином смысле, решается, как правило, из механических или технических соображений. Например, в работе [1] задача снижения энергопотребления подводного аппарата решалась с использованием обтекаемой конструкции корпуса и разрабатываемой в этих работах системы управления солнечной энергией и энергией подводного аппарата.

Хорошо известно [2], что движение подводного аппарата описывает динамическая система управления с параметрами. Выбор параметров определяет, в частности, вид и расположение управляющих агрегатов подводного аппарата. Энергия, потребляемая аппаратом, равна интегральному функционалу, зависящему от управления системы. Задача поиска модели подводного аппарата с минимальным потреблением энергии формулируется на математическом языке как задача поиска параметров системы, при которых указанный функционал минимален. Аналогичные задачи формулируются для летательных аппаратов и наземных транспортных средств, а также для других функционалов, например, характеризующих время движения.

Рассматриваемая задача близка задаче оптимального управления, но отличается тем, что требуется найти оптимальные значения параметров, а не оптимальное управление. Мы не используем методы теории оптимального управления в виду сложности их применения к данной задаче. Наш подход основан на предположении, что в малой окрестности каждого допустимого состояния любая траектория системы возможна и равновероятна. Из этого следует, в частности, локальная управляемость системы. Кроме того, локальную траекторию системы можно считать случайной величиной. Тогда значение функционала также есть случайная величина, а поставленную задачу можно понимать как задачу минимизации математического ожидания значения функционала. Коэффициент локальной управляемости системы относительно заданного функционала, определяемый нами как величина обратно пропорциональная указанному математическому ожиданию, мы предлагаем использовать для сравнения систем с разными значениями параметров.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – состояние системы, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ – ее управления, $\mathcal{X}$ – *область допустимых состояний*, $\mathcal{U}$ – *область допустимых управлений*, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ – набор параметров, а $\dot{x} \equiv dx/dt$.

Пусть для системы (1) ставится задача выбора таких параметров α, для которых минимален следующий функционал. Рассмотрим гладкую неотрицательную при $x \in \mathcal{X}$ и $u \in \mathcal{U}$ функцию $\Phi(x, u)$ и отображение, которое каждому решению $(x(t), u(t))$ системы (1) ставит в соответствие интеграл по промежутку $[0, T]$ функции $\Phi(x(t), u(t))$. Упомянутый функционал равен максимальному по решениям системы (1) значению этого отображения, т.е.

$$\max_{(x(t),u(t))} \int_0^T \Phi(x(t), u(t)) dt. \tag{2}$$

В работе [3] рассмотрена очень упрощенная модель подводного аппарата и исследована задача такого расположения его управляющих винтомоторных агрегатов, при котором энергопотребление аппарата минимально.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Напомним, что состояние $x_f \in D \subset \mathcal{X}$ называют *достижимым из состояния* $x_0 \in D \subset \mathcal{X}$ *в области* D, если существует решение $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_f]$, системы (3), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f, \\ x(t) \in D, \quad u(t) \in \mathcal{U} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, t_f]. \end{gathered} \tag{4}$$

Систему (3) называют *управляемой в области* $D \subset \mathcal{X}$, если любое состояние $x_f \in D$ достижимо из любого состояния $x_0 \in D$ в области D.

Областью достижимости состояния $x_f \in \mathcal{X}$ *за время* $T > 0$ *в области* $D \subset \mathcal{X}$ называют множество таких состояний $x_0 \in \mathcal{X}$, что существует решение $(x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_f]$, системы (3), удовлетворяющее условиям (4) при $t_f - t_0 < T$.

Систему (3) называют *локально управляемой в точке* $x_f \in \mathcal{X}$, если для любого $T > 0$ область достижимости состояния x_f за время T в области $\mathcal{X}$ содержит окрестность точки x_f [4]. Система (3) *локально управляема в области* $\mathcal{X}$, если она локально управляема в любой точке $x_0 \in \mathcal{X}$.

Замечание. В определении локальной управляемости рассматриваются траектории системы, которые начинаются в произвольной точке $x_0 \in \mathcal{X}$ и кончаются в заданной точке x_f, а не наоборот. Такой выбор объясняется тем, что в начальный момент, как правило, определены значения u, а в конечный момент мы можем считать компоненты u произвольными.

Пример системы, которая управляема, но не локально управляема, приведен в работе [3] (см. пример 3).

3. Коэффициент локальной управляемости

Предположим, система (1) приведена к виду

$$u = \zeta(x, \dot{x}, \ldots, x^{(s)}, \alpha), \quad x \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U}. \tag{5}$$

и выбран функционал (2). Определим коэффициент локальной управляемости, соответствующий этому функционалу. Так как мы не обладаем какой-либо информацией о возможных значениях вектора $\bar{x} = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(s)})$, будем считать, что любые достаточно малые его отклонения от $\bar{x}_f = (x_f, 0, \ldots, 0)$ возможны и равновероятны. Понимая $\bar{x}$ как случайный вектор, равномерно распределенный на кубе со стороной 2δ с центром в точке $\bar{x}_f$, рассмотрим математическое ожидание $M[\Phi](x_f, \alpha)$ случайной величины $\Phi(x, \zeta(x, \dot{x}, \ldots, x^{(s)}, \alpha))$. *Коэффициент локальной управляемости системы (1) в состоянии* x_f *относительно функционала* (2) определим как величину, обратную к пределу

$$k(x_f, \alpha) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} M[\Phi](x_f, \alpha),$$

т.е. $1/k(x_f, \alpha)$. *Коэффициентом локальной управляемости системы* (1) *относительно функционала* (2) будем называть точную нижнюю грань коэффициентов локальной управляемости системы (1) в ее допустимых состояниях. Задача поиска параметров модели с наилучшим качеством управления сводится к нахождению максимума по всем параметрам модели коэффициента локальной управляемости системы, т.е. к поиску $\min_\alpha \sup_{x_f} k(x_f, \alpha)$.

Выведем формулу для $k(x_f, \alpha)$. Обозначим также через $V(\delta)$ объем куба

$$K_\delta = \{(x, \dot{x}, \ldots, x^{(s)}) : |x_i - x_{f,i}| \leqslant \delta,\ |x_i^{(j)}| \leqslant \delta,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, s\},$$

Тогда

$$M[\Phi](x_f, \alpha) = \frac{1}{V(\delta)} \int_{K_\delta} \Phi(x, \zeta(x, \dot{x}, \ldots, x^{(s)}, \alpha)) d\bar{x}.$$

4. Заключение

Введенные понятия были исследованы в [3] для системы, описывающей движение подводного аппарата в вертикальной плоскости. Рассмотрен случай, когда аппарат управляется только винтомоторными агрегатами, винты которых вращаются только в одну сторону. Показано, что движение такого аппарата описывает локально управляемая система, преобразуемая к виду (5). Задача минимизации потребляемой энергии двигателями аппарата эквивалентна задаче максимизации коэффициента локальной управляемости для соответствующего функционала. Численные вычисления показали, что данный коэффициент имеет большое количество точек локального максимума. И при движении по продолжительным и разнообразным траекториям модель с большим значением коэффициента локальной управляемости потребляет меньше энергии.

Отметим также, что в работе рассмотрен случай, когда сдвиг из любого состояния в любом направлении возможен и равновероятен. Однако в реальной ситуации вероятность сдвига в каком-либо направлении зависит от решаемой аппаратом задачи. По нашему мнению, закон распределения вероятности сдвига в направлении может быть определен при дополнительном исследовании траекторий аппарата с использованием искусственного интеллекта. При этом изменение закона распределения приведет к изменению зависимости коэффициента локальной управляемости от параметров и к другим оптимальным значениям параметров.

Исследование выполнено при поддержке программы "Приоритет 2030"МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Список литературы

1. A. Amory and E. Maehle. Energy Efficiency of the Swarm-Capable Micro AUV SEMBIO // OCEANS 2019. Marseille, France, 2019. P. 1-7.
2. T.I. Fossen. Guidance and control of ocean vehicles. Chichester: John Wiley and Sons, 1994.
3. Велищанский М.А., Четвериков В.Н. Поиск параметров модели с наилучшей локальной управляемостью // Дифференциальные уравнения, 2023. Т. 59, № 12. С. 1692-1701.
4. Петров Н.Н. Локальная управляемость автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 7. С. 1218–1232