УДК 517.929.4 + 681.5.011

СХОДИМОСТЬ ПРОТОКОЛА КОНСЕНСУСА С ЧАСТИЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д.К. Хомутов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: homutov_dk@mail.ru

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, управление с запаздыванием, лапласовская матрица.

Аннотация: В работе изучается протокол консенсуса в многоагентной системе первого порядка с частичным запаздыванием, в котором часть агентов получает информацию с запаздыванием, а часть – без него. Получен ряд ключевых результатов, а именно условие независимости сходимости данного протокола от запаздывания и выражение для граничного значения запаздывания в ином случае, зависящего от спектра лапласовской матрицы. Так же исследовано асимптотическое поведение протокола в случае сходимости и сходимость к консенсусу.

1. Введение

Многоагентные системы представляют собой системы, состоящие из автономных интеллектуальных агентов, чем представляют большой интерес, и применяются во многих областях [1, 2]. В системах с информационными влияниями агенты, обладающие некоторой характеристикой, принимают решения исходя из своего мнения, а также влияний со стороны других агентов. Подобные системы удобно рассматривать в виде взвешенного ориентированного графа, где узлы соответствуют агентам, а дуги соответствуют влиянию агентов друг на друга. Так вес дуги представляет влияние одного агента на другого: чем больше вес, тем, соответственно, больше влияние.

Одна из задач, рассматриваемая в многоагентных системах – задача достижения агентами консенсуса. Это может быть, например, как согласование мнения, выраженного числовой характеристикой, так и согласование позиции, в которой должны собраться все агенты. Таким образом задача достижения консенсуса формулируется как согласование характеристик всех агентов при любом их начальном значении.

В данной работе исследуется протокол консенсуса первого порядка в многоагентной системе с информационным влиянием и частичным запаздыванием.

Системы с запаздывающей обратной связью являются хорошо изученной областью в теории управления. Так в XX веке были получены классические результаты по устойчивости [3-6], а также были представлены работы по теории управления с запаздыванием [7, 8].

2. Основные понятия

Рассмотрим многоагентную систему с множеством агентов $V = \{1, \dots, n\}$. Как говорилось ранее, данную систему можно представить в виде взвешенного орграфа влияний $\Gamma = (V, E)$, где $E \subseteq V \times V$ является множеством дуг. Множество V в таком случае будет множеством узлов в графе. Если агент j влияет на агента i с весом a_{ij}, то в Γ существует дуга из узла j в узел i с весом a_{ij}. Матрицу $A = (a_{ij})$ называют матрицей связей.

Базовый протокол консенсуса первого порядка имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\left(x_i(t) - x_j(t)\right),$$

где $x_i(t)$ – характеристика i-ого агента в момент времени t.

Определение 1. L является лапласовской матрицей, соответствующая Γ, если

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j; \\ \sum_{k\neq i} a_{ik}, & i = j. \end{cases}$$

Тогда базовый протокол консенсуса первого порядка будет иметь матричный вид

$$\dot{x}(t) = -Lx(t),$$

где $x(t)$ – вектор характеристик агентов в момент времени t.

Стоит отметить, что $L\mathbf{1}_n = \mathbf{0}_n$, где $\mathbf{1}_n$ и $\mathbf{0}_n$ – вектор-столбцы из единиц и нулей, соответственно. Таким образом, 0 всегда является собственным значением матрицы L, а $\mathbf{1}_n$ – собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению.

Также для описания асимптотического поведения многоагентной системы понадобятся следующие определения.

Определение 2. Индекс v матрицы A – это размер наибольшей Жордановой клетки с нулевой диагональю в Жордановой форме матрицы A, или такое наименьшее число v, при котором $\operatorname{rank} A^v = \operatorname{rank} A^{v+1}$.

Определение 3. Собственным проектором матрицы A, соответствующим нулевому собственному значению, называют такую стохастическую идемпотентную матрицу $A^{\vdash}$, что $\mathcal{R}(A^{\vdash}) = \mathcal{N}(A^v)$ и $\mathcal{N}(A^{\vdash}) = \mathcal{R}(A^v)$.

Согласно [9], индекс произвольной лапласовской матрицы равен 1.

В данной работе будет рассматриваться протокол консенсуса первого порядка с частичным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = -L_1 x(t) - L_2 x(t-\tau), \quad (1)$$

где L_1 и L_2 соответствуют орграфам, веса дуг в которых не превосходят $\frac{1}{n}$, и матрица $K = L_1 + L_2$ соответствует полному графу с весами дуг $\frac{1}{n}$.

Также в данной работе спектр матрицы L_1 будет рассмотрен с учетом кратности и обозначен как $\sigma(L_1) = (0, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, то есть в нем могут содержаться одинаковые элементы.

Стоит так же отметить разницу между сходимостью протокола и сходимостью протокола к консенсусу.

Определение 4. Пусть $x(t)$ – решение системы (1). Протокол (1) сходится, если существует конечный предел $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Определение 5. Пусть $x(t)$ – решение системы (1). Протокол (1) сходится к консенсусу, если $\lim_{t\to\infty} x(t) = c\mathbf{1}_n$, где $c \in \mathbb{R}$.

3. Основной результат

В данном разделе будут показаны результаты исследования сходимости протокола (1), а также асимптотическое поведение данного протокола.

Характеристической функцией системы (1) является функция $F(z)$:

$$F(z) = det(zI + L_1 + L_2 e^{-\tau z}).$$

Утверждение 1.

$$F(z) = z \prod_{\lambda \in \sigma(L_1) \setminus (0)} \left(z + \lambda + e^{-\tau z}(1-\lambda)\right).$$

Таким образом, характеристическую функцию системы (1) можно представить в виде произведения характеристических функций уравнений

(2) $$\dot{y}(t) = -\lambda y(t) - (1-\lambda) y(t-\tau).$$

Так если для всех $\lambda \in \sigma(L_1) \setminus (0)$ решение уравнения (2) будет устойчивым, то протокол (1) будет сходится. Устойчивость решения уравнения (2) будет оценена с помощью метода Цыпкина [5]. Обозначим характеристическую функцию (2) как

$$f_\lambda(z) = z + \lambda + e^{-\tau z}(1-\lambda) = Q(z) - P(z) e^{-\tau z}.$$

Пусть квазимногочлен $Q(z) - P(z)e^{-\tau z}$ является характеристической функцией системы с запаздывающей обратной связью. Устойчивость такой системы можно оценить с помощью амплитудно-фазовой характеристики соответствующей разомкнутой системы с запаздыванием.

$$W_\tau(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} e^{i\omega\tau} = -\frac{1-\lambda}{i\omega + \lambda} e^{-i\omega\tau}.$$

Если точка $(1,0)$ лежит вне годографа $W_\tau(i\omega)$, то решение уравнения (2) будет устойчивым. Стоит также отметить, что

$$W_\tau(i\omega) = W_0(i\omega) e^{-i\omega\tau},$$

и

$$|W_\tau(i\omega)| = |W_0(i\omega)|.$$

Тогда если $|W_0(i\omega)| < 1$ для любого $\omega \geq 0$ и любого $\lambda \in \sigma(L_1) \setminus (0)$, то решения уравнений (2) будут устойчивы при любом τ, что выражено в следующем утверждении. Обозначим $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$.

Утверждение 2. *Пусть для всех* $\lambda \in \sigma(L_1) \setminus (0)$ $2\alpha > \beta^2 + 1$. *Тогда протокол (1) будет сходится при любом* τ.

В противном случае необходимо найти граничное значение τ, что выражено в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть условие из Утверждения 2 не выполнены. Обозначим*

$$\Lambda = \{\lambda \in \sigma(L_1) \setminus (0) \mid 2\alpha \leq \beta^2 + 1\}.$$

Вычислим для всех $\lambda \in \Lambda$

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\dfrac{(1-\alpha)\alpha - \beta\sqrt{1 - 2\alpha + \beta^2}}{(1-\alpha)^2 + \beta^2}\right)}{\sqrt{1 - 2\alpha + \beta^2} - \beta}.$$

Тогда протокол (1) *будет сходится для всех* $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$.

Далее рассмотрим асимптотическое поведение протокола (1) в случае сходимости, что выражено в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть протокол* (1) *сходится и* $x(t)$ *– решение системы* (3)

(3) $$\begin{cases} \dot{x}(t) = -L_1 x(t) - L_2 x(t-\tau), & t \geq 0; \\ x(t) = x(0), & t \in [\tau, 0). \end{cases}$$

Тогда $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{n} E(I - \tau L_2) x(0)$, *где* E *– матрица из единиц.*

Следствие 1. *Пусть условие Теоремы 2 выполнено. Тогда протокол (1) будет сходиться к консенсусу при любом векторе начальных значений*

Пример. Пусть $x(0) = (2, 4, 6, 8)^T$, и матрица L_1 задана следующим образом:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\sigma(L_1) = (0, 0.25, 0.3455, 0.9045)$. Спектр является действительным, и условие из Утверждения 2 о независимости сходимости от запаздывания становится эквивалентным условию

$$Re(\lambda) > \frac{1}{2}, \lambda \in \sigma(L_1) \setminus (0).$$

Очевидно, в данном примере описанное выше условие не выполняется. Тогда согласно Теореме 1

$$\Lambda = (0.25, 0.3455);\ \tau_0 = \min(2.7020, 3.8262) = 2.7020.$$

Рассмотрим поведение системы для τ_0 и $\tau_1 = 0.9\tau_0 = 2.4318$. Стоит отметить, что асимптотическое поведение системы при τ_1

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{n} E(I - \tau_1 L_2) = 5.6080(1, 1, 1, 1)^T.$$

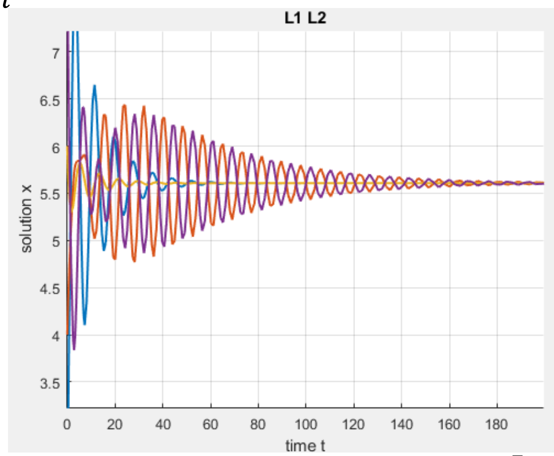

Рис. 1. Поведение системы при $\tau = \tau_1$, $x(1000) \approx 5.6080(1, 1, 1, 1)^T$.

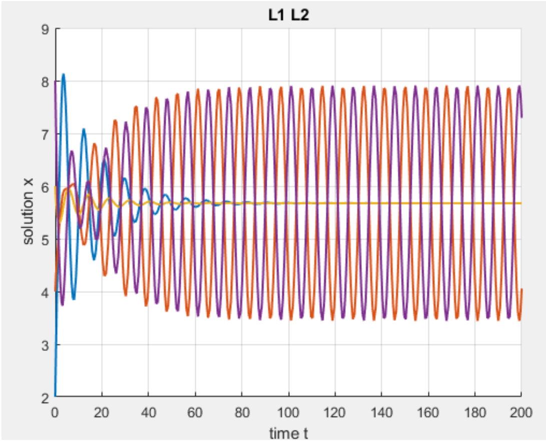

Рис. 1. Поведение системы при $\tau = \tau_0$. Протокол не сходится.

4. Заключение

В данной статье был исследован протокол консенсуса первого порядка с частичным запаздыванием. Получено условие независимости сходимости данного протокола от запаздывания и формула граничного значения запаздывания в противном случае. Также установлено, что если протокол сходится, то он будет сходится к консенсусу при любом векторе начальных значений, а также получена формула для вычисления значения консенсуса. Полученные результаты могут быть применены в дальнейших исследованиях.

Список литературы

1. Olfati-Saber R., Murray R.M. Consensus Problems in Networks of Agent with Switching Topology and Time-Delays // IEEE Transactions on Automatic Control. 2004. Vol. AC-49, No. 9. P. 1520-1533.
2. Ren W., Beard R.W., Atkins E.M. Information Consensus in Multivehicle Cooperative Control // IEEE Control Systems Magazine. 2007. Vol. 27, No. 2. P. 71-82.
3. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1942. Т. 6, №. 3. С. 115-134.
4. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с .
5. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
6. Белман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения / Пер. с англ. Зверкина А.М., Каменского Г.А. под ред. Эльсгольца Л.Э. М.: Мир, 1967. 548 с.
7. Цыпкин Я.З. Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // Автоматика и телемеханика, 1946. Т. 7, №. 2. С. 107-201.
8. Gu K., Chen J., Kharitonov V.L. Stability of time-delay systems. Berlin: Birkhäuser, 2003. 294 p.
9. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear algebra and its applications, 2002. Vol. 356, No. 1-3. P. 253-274.