УДК 519.7

О МЕЖМОДЕЛЬНОЙ ИМПЛИКАЦИИ СВОЙСТВ СО СТРУКТУРНЫМИ ВЕТВЛЕНИЯМИ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

С.Н. Васильев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vassilyev_sn@mai.ru

Ключевые слова: математическая теория систем, морфизмы, вектор-функции сравнения, динамика систем, теория управления, импликация свойств, теоремы сохранения**.**

Аннотация: Обсуждаются алгоритмы получения условий межмодельной импликации свойств с ветвящейся структурой их определений в неформальном языке позитивно-образованных формул. Обеспечивается расширение множества межмодельных отношений связи с ослаблением налагаемых на них условий вследствие декомпозиции между ними полного набора формируемых условий импликации. Не требуется априорного задания каких-либо из условий импликации.

1. Введение

Межмодельная импликация свойств понимается как следование некоторого свойства P математической модели M из факта наличия некоторого свойства P' в другой модели M' . Далее модель M и свойство P называются *исходными*, M' и P' – *сопряженными*, а теоремы об импликации свойств – *теоремами ИС*.

В литературе сопряженные модель и свойство часто аналогичны исходным. Вместо неформального понятия «аналогичности» в теориях алгебраических систем (алгебрах и реляционных структурах) используется понятие сигнатуры, например как набора функциональных и предикатных символов языка первопорядковой логики (ПЛ). Модели M и M' являются интерпретациями одной и той же сигнатуры, а свойства P и P' – интерпретациями одной формулы в этой сигнатуре, что объясняет именование теорем об импликации свойств алгебраических систем теоремами *сохранения* свойств или *устойчивости* свойств [1-3]. Ввиду большей сложности определений динамических систем в сравнении с определениями алгебраических, в динамике вместо сигнатуры более приемлемо понятие *однородности* (структур [4] или систем одного рода [5]).

Импликация свойств $P' \to P$ в теоремах ИС $G \to (P' \to P)$обычно обеспечивается набором условий G на множество V отношений межмодельной связи. Далее множество V называется *линкером*, а сами отношения (отображения) – *линкерными компонентами* (ЛК). В теориях алгебраических систем линкер может быть однокомпонентным, например – гомоморфизмом (в т.ч. сюръективным и/или инъективным). В динамике систем обычно несколько ЛК, каковыми в составе линкера, помимо гомоморфизмов, гомеоморфизмов и пр., может быть вектор-функция сравнения (ВФС) (в обобщение вектор-функций Ляпунова [6,7]), а также функциональные отношения (отображения) на шкалах времени моделей M и M', на пространствах их допустимых управлений, значений допустимых возмущений и др. В отличие от морфизмов, ВФС обычно подчинена условию мажорирования на процессах исходной модели процессами сопряженной модели. Этим отчасти объясняется именование соответствующих теорем ИС *теоремами сравнения*, а метода их синтеза [5, 7, 8] – *методом сравнения*.

В алгебраических системах основной классической проблематикой импликации свойств $P' \to P$ является нахождение классов свойств (обычно формул в ПЛ), сохраняющихся при конкретном типе морфизмов (обзоры см., например в [1-3]). В динамике систем и теории управления эти результаты также интересны (см., например [9]), особенно если отношения и операции алгебраической системы и используемые морфизмы могут быть определены не только на базовых множествах (носителях), но и на т.н. *ступенях* [4]. Однако отыскание классов сохранения не обеспечено алгоритмами и даже вопрос представимости исходного свойства логически эквивалентными преобразованиями в найденном классе свойств не всегда алгоритмически разрешим.

Более алгоритмизируемы в динамике систем [7] и вообще в математической теории систем [5, 8, 10] – задачи синтеза условий импликации непосредственно по виду исходного свойства. Но в этих работах сам тип линкера выбирался априорно указанием т.н. условия связи C, например условия мажорирования ВФС. При этом синтез теорем ИС состоял в формировании таких дополнительных условий D теоремы ИС, что $(C\&D) \to (P' \to P)$. Таковыми оказывались, например, условия определенной положительности ВФС, существования у нее бесконечно большого низшего предела, оценки значений ВФС относительно некоторых множеств из фазовых пространств моделей M и M' . В более поздних работах [11-13] условие C на линкер не задается, а синтезируется алгоритмически как и условия D – по виду свойств P и P'.

В данной работе рассматриваются свойства P с ветвящейся структурой определений. Не предполагается однородности моделей M, M' и одинаковой структуры свойств P и P', кроме равенства их *степеней* (количества N ветвей в структуре). Не требуется априорного задания типа линкера. Вопросы автоматизации доказательства (как, например в [14]) здесь не рассматриваются и синтез ведется в частично-формализованном языке.

Использование неоднородной модели $M' = \{M'_i\}_{\overline{i=1,N}}$, как семейства подмоделей M'_i, предполагает использование и соответствующих линкеров V_i, называемых *частными линкерами* пар (M, M'_i). В общем случае $V = \{V_i\}_{\overline{i=1,N}}$, а компоненты частных V_i являются и компонентами *полного* линкера V. Наложение условий импликации на N троек (M, V_i, M'_i) при $N > 1$ облегчает требования к отдельной тройке. Рассмотрим формирование в терминах троек (M, V_i, M'_i) условий G импликации $P' \to P$.

2. О получении условий импликации свойств

Формулы математического языка рассматриваются в частично-формализованном *позитивно-образованном* представлении. Например, определение свойства P образуется из формул P_i, $\overline{i=1,N}$, именуемых *заключительными формулами* (З-формулами), с помощью типовых кванторов (Т-кванторов) $w_\alpha \in \{\widehat{w}_\alpha, \widetilde{w}_\alpha\}$ и логических связок &, ∨, т.е. без отрицаний и импликаций как вне Т-кванторов, так и З-формул. Здесь $\widehat{w}_\alpha = \forall z_\alpha(W_\alpha(\bar{z}_\alpha) \to \ldots), \widetilde{w}_\alpha = \exists z_\alpha(W_\alpha(\bar{z}_\alpha)\&\ldots)$, $W_\alpha(\bar{z}_\alpha)$ – типовое условие переменной z_α, а $\bar{z}_\alpha$– список переменных, включающий z_α, а также старшие переменные, т.е. операторные переменные тех Т-кванторов, в область действия которых в P входит w_α .

Структурой $S(P)$свойства P в этом представлении именуется древовидный граф, листья которого помечены метками $\mathbf{p}_i$ З-формул, узлы ветвления – метками $\mathbf{s}_k$

логических связок &, ∨ ($k = \overline{1, N-1}$), остальные узлы – метками $\mathbf{z}_\alpha$ переменных z_α Т-кванторов w_α , а ребра соответствуют схеме образования P из З-формул P_i.

В структуре сопряженного свойства P' (той же степени N) используем метки $\mathbf{p}'_i, \mathbf{s}'_k, \mathbf{z}'_\beta$. При этом для Т-кванторов w'_β и их переменных z'_β используются индексы β, а не α, так как может не быть биективного соответствия Т-кванторов w_α и w'_β. Например, в паре с исходным свойством P стабилизируемости и ограниченности решений $x(\,.\,;\ t_0, \mathrm{x}_0, u)$ обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) M

$$\mathrm{P} \doteq \forall t_0 \in T_0\, \exists \delta > 0\ (\forall \mathrm{x}_0 \in R^n\colon \|\mathrm{x}_0\| < \delta)\, \exists u \in U\, \forall x(\,.\,;\ t_0, \mathrm{x}_0, u)$$
$$[\,\forall \varepsilon > 0\, \exists t_1 > t_0\, \forall t \geq t_1\, \forall \mathrm{x} = x(t)\ \|\mathrm{x}\| < \varepsilon\ \&\ \forall t \geq t_0\, \forall \mathrm{x} = x(t)\ \|\mathrm{x}\| < c\,]$$

рассмотрим свойство P' (притяжения и ограниченности) решений $x'_1(\,.\,;\ t'_{01}, \mathrm{x}'_{01}), x'_2(\,.\,;\ t'_{02}, \mathrm{x}'_{02})$ двух ОДУ $M' = (M'_1, M'_2)$

$$\mathrm{P}' \doteq [\,\forall t'_{01} \in T'_{01}\, \exists \delta'_1 > 0\ (\forall \mathrm{x}'_{01} \in R^{m_1}\colon \|\mathrm{x}'_{01}\| < \delta'_1)\, \forall x'_1(\,.\,;\ t'_{01}, \mathrm{x}'_{01})$$
$$\forall \varepsilon' > 0\, \exists t'_1 > t'_{01}\, \forall t'_{11} \geq t'_1\, \forall \mathrm{x}'_1 = x'_1(t'_{11})\ \|\mathrm{x}'_1\| < \varepsilon'\,]\ \&$$
$$\&\ [\forall t'_{02} \in T'_{02}\, \exists \delta'_2 > 0\ (\forall \mathrm{x}'_{02} \in R^{m_2}\colon \|\mathrm{x}'_{02}\| < \delta'_2)\, \forall x'_2(\,.\,;\ t'_{02}, \mathrm{x}'_{02})\, \forall \mathrm{x}'_2 = x'_2(t'_{11})\ \mathrm{x}'_2 < c'_2\,].$$

При этом для Т-квантора по управлению из P в P' нет однотипного Т-квантора, т.е. с операторной переменной, типовое условие которой было бы аналогично, но в терминах M'. Остальным Т-кванторам из P соответствуют однотипные из P' . Множество всех пар однотипных Т-кванторов (w_α, w'_β) из P и P' образует биекцию $\varphi\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}'$, $\varphi(\mathbf{z}_\alpha) = \mathbf{z}'_\beta$, где $\mathbf{Z}$ (соотв. $\mathbf{Z}'$) – множество узлов с метками $\mathbf{z}_\alpha$ (соотв. $\mathbf{z}'_\beta$).

Для большей обособленности подмоделей M'_i, что упрощает формируемые далее условия G, формула P подлежит эквивалентным преобразованиям заменой подформул $\widetilde{w}_\alpha\ (\underset{i=\overline{1,n}}{\vee} H_i)$ (соотв. $\widehat{w}_\alpha\ (\underset{i=\overline{1,n}}{\&} H_i)$) на $\underset{i=\overline{1,n}}{\vee} (\widetilde{w}_{\alpha i} H_i)$ (соотв. $\underset{i=\overline{1,n}}{\&} (\widehat{w}_{\alpha i} H_i)$). После этого некоторые $w_{\alpha i}$ могут стать *несущественными* (т.е. без вхождений $z_{\alpha i}$ в область H_i действия $w_{\alpha i}$) и удаляются. Аналогично в $\boldsymbol{P'}$**.** Могут использоваться и собственные аксиомы рассматриваемых моделей, например как в случае ветвления в $\boldsymbol{P'}\, \exists \delta' > 0\ (\,F_1(\delta')\ \&\ F_2(\delta')\,)$, где $F_k(\delta') = (\forall \mathrm{x}'_{0k} \in R^{m_k}\colon \|\mathrm{x}'_{0k}\| < \delta')\, \overline{P_k}$ $(k = \overline{1,2})$. Замена $\widetilde{w'}_s\ (\underset{i=\overline{1,n}}{\&} H'_i)$ на $\underset{i=\overline{1,n}}{\&} (\widetilde{w'}_{si} H'_i)$ возможна, если $F_k\,(\delta)$ монотонно относительно $\delta\colon \delta' > \delta'' \to (F_k\,(\delta') \to F_k\,(\delta''))$.

Формируется структура $S(G)$ с множеством меток $\mathbf{Z} \cup \mathbf{Z}' \cup \{\bar{\mathbf{s}}_k\}_{\overline{k=1,N-1}} \cup \{\bar{\mathbf{p}}_i\}_{\overline{i=1,N}}$. Структуры $S(P)$ и $S(P')$ должны быть вложимы в структуру $S(G)$ с сохранением прежних порядков узлов в $S(P)$ и $S(P')$ и с попарным слиянием узлов $\mathbf{s}_k$,$\mathbf{s}'_k$ в $\bar{\mathbf{s}}_k$, а листьев $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}'_i$ в $\bar{\mathbf{p}}_i$. Кроме того, важен порядок узлов $\mathbf{z}_\alpha$ относительно $\mathbf{z}'_\beta$ с учетом $\varphi\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}'$, а именно, если $\mathbf{z}'_\beta = \varphi(\mathbf{z}_\alpha)$, должны выполняться условия: a) в случае $\widehat{w}_\alpha \in P$, узел $\mathbf{z}_\alpha$ ближе к корню, чем $\mathbf{z}'_\beta$; b) если $\widetilde{w}_\alpha \in P$, то наоборот.

Пары однотипных узлов $(\mathbf{z}_\alpha, \mathbf{z}'_\beta)$ построенной структуры $S(G)$ преобразуются в Т-кванторы искомой формулы G следующими подстановками:

1) в упомянутом случае (a) подстановки $\widehat{w}_\alpha / \mathbf{z}_\alpha$и $(\widetilde{w'}_\beta\colon \Phi_{\alpha\beta}(\overline{z'_\beta}))/\mathbf{z}'_\beta$,
2) в случае (b) подстановки $\widehat{w'}_\beta / \mathbf{z}'_\beta, (\widetilde{w}_\alpha\colon \Phi_{\beta\alpha}(\overline{z_\alpha}))/\mathbf{z}_\alpha$.

Здесь $\Phi_{\alpha\beta}$ и $\Phi_{\beta\alpha}$ выражают связи однотипных переменных, а также, может быть, старших переменных. Исключена необходимость априорного задания линкеров определяющими их кванторными условиями связи подмоделей M_i, M'_i и поэтому не надо встраивать структуры этих условий в структуру $S(G)$, что упрощает ее выбор. В Т-квантор существования формулы G конъюнктивно встраиваются лишь простые бескванторные условия связи. Например, если модели M и M'_1 связаны двумя межмодельными отношениями связи $\omega_1\colon T \to T_1{}', \nu_1\colon T \times R^n \to R^{m_1}$ (как частным линкером $V_1 = \{\omega_1, v_1\}$), то в упомянутый Т-квантор существования формулы G могут быть встроены бескванторные формулы связи: $\omega_1(t_0) = t'_{01}, v_1(t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{x}'_{01}, v_1(t, \mathrm{x}) \leq \mathrm{x}'_1$.

Остальные узлы $\mathbf{z}_\alpha$ и/или $\mathbf{z}'_\beta$ преобразуются подстановками:

3) если $\mathbf{z}_\alpha \notin dom\ \varphi$, то $\widehat{w}_\alpha/\mathbf{z}_\alpha$,
4) если $\widetilde{w'}_\beta \in P'$и $\mathbf{z}'_{\beta_\beta} \notin range\ \varphi$, то $\widehat{w'}_\beta/\mathbf{z}'_\beta$,

Узлы ветвления $\bar{\mathbf{s}}_k$ в $S(G)$ преобразуются в логические связки формулы G:

5) если в P узел $\mathbf{s}_k = \&$, то в $P\ \ '$узел $\mathbf{s}'_k = \&$ и подстановка $\&/\bar{\mathbf{s}}_k$ в $S(G)$;
6) если $\mathbf{s}_k = \mathbf{s}'_k = \vee$, то подстановка $\&/\bar{\mathbf{s}}_k$ в $S(G)$;
7) если $\mathbf{s}_k = \vee, \mathbf{s}'_k = \&$, то подстановка $\vee/\bar{\mathbf{s}}_k$ в $S(G)$.

Листья $\bar{\mathbf{p}}_i$ преобразуются в З-формулы искомой формулы G подстановками $(P'_i \to P_i)/\bar{\mathbf{p}}_i, \forall i \in \overline{1, N}$.

Справедливо утверждение: $G \to (P' \to P)$, *если* G, P' *и* P *удовлетворяют выше сформулированным условиям.*

Дальнейшие правила преобразования расщепляют построенное условие G в набор G^* более простых. Изложение результатов в отдельной публикации с обоснованием и примерами применения планируется.

В целом, применение сопряженной модели $M' = \{M'_i\}_{\overline{i=1,N}}$ и N частных линкеров V_i приводит к набору условий теоремы ИС на все N троек $(M, V_i, M'_i)_{\overline{i=1,N}}$. Например, выше, в связи со свойством P стабилизируемости и ограниченности решений ОДУ M, подмодели M'_1 и M'_2 сопряженной модели M' были выбраны как разные ОДУ. Поэтому набор G^* достаточных условий импликации $P' \to P$ разложится на две тройки $(M, V_i, M'_i)_{\overline{i=1,2}}$. В частности, условию типа определенной положительности из этого набора должна будет удовлетворять некоторая ВФС v_1 как компонента частного ликера V_1, а требуемая оценка значений ВФС относительно множеств $\{\mathrm{x} \in R^n: \| \mathrm{x} \| < c\}$ и $\{\mathrm{x}'_2 \in R^{m_2}: \mathrm{x}'_2 < c'_2\}$ может удовлетворяться другой ВФС v_2 как компонентой из V_2.

3. Заключение

В развитие теорем сохранения свойств алгебраических систем при морфизмах и метода сравнения в математической теории систем алгоритмизируется формирование достаточных условий межмодельной импликации свойств со структурным ветвлением их определений. При этом применяются сопряженные модели, неоднородные исходным, а сопряженные свойства могут структурно и семантически отличаться от исходных. Наложение формируемого алгоритмически набора условий теоремы об импликации свойств на несколько частных линкеров, связывающих исходную модель с подмоделями сопряженной модели, ослабляет требования к отдельно взятому частному линкеру.

Не требуется априорного задания линкеров. Повышаются алгоритмичность синтеза условий теоремы об импликации свойств и вместе с этим гибкость альтернирования отношений межмодельной связи по ходу синтеза теоремы, например в части наборов связываемых ими переменных или выбора направлений действия линкерных отображений.

Изложение результатов с обоснованием и примерами применения планируется в отдельной публикации.

Список литературы

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 329 с.
2. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977. 614 с.
3. Feder T., Yardi M.Y. Homomorphism Closed vs. Existential Positive // Proceedings of the 18^{th} Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS'03. June 22-25, 2003, Ottawa, Canada. 2003. P. 311-320.
4. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965. 465 с.
5. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 481 с.
6. Bellman R. Vector Lyapunov Functions // J. Soc. Industr. and Appl. Math. Ser. A. 1962. Vol. 1, No. 1. P. 32-34.
7. Матросов В.М. Метод сравнения в динамике систем // Дифф. уравнения. 1974. Т. 10, № 9. С. 1547-1559; 1975. Т. 11, № 5. С. 403-417.
8. Васильев С.Н. Метод сравнения в анализе систем. I-IV // Дифф. уравнения. 1981. Т. 17, № 9. С. 1562-1573; 1981. Т. 17, № 11. С. 1945-1954; 1982. Т. 18, № 2. С. 197-205; 1982. Т. 18, № 6. С. 938-947.
9. Васильев С.Н. Сохранение некоторых динамических свойств при морфизмах // Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. Новосибирск: Наука, 1978. С. 111-119.
10. Васильев С.Н., Матросов В.М., Суменков Е.А. Принцип сравнения в математической теории систем // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 4. С. 139-150.
11. Nagul N.V. The Logic-algebraic Equations Method in System Dynamics // S.P. Math. J. 2013. Vol. 24, No. 4. P. 645-662.
12. Нагул Н.В. Генерация условий для сохранения свойств управляемых дискретных систем событий // Автоматика и телемеханика. 2016. Т. 77, № 4. С. 153-172.
13. Vassilyev S.N. On the Implication of Properties of Related Systems: the Method for Obtaining Implication Conditions and Application Examples // J. of Computer and Systems Sciences International. 2020. Vol. 59, No. 4. P. 479-493.
14. Васильев С.Н. Дедуктивное решение логических уравнений в задачах интеллектуализации цифровых систем // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ'2019, Москва, 17-20 июня 2019 г. / Под общ. ред. Д.А. Новикова. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. С. 1908-1913.