УДК 517.9

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗМЕРЕНИЯ С УЧЕТОМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

М.А. Сагадеева
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
Россия, 454080, Челябинск, Ленина пр., 76
E-mail: sagadeevama@susu.ru

Ключевые слова: задача оптимального управления, система леонтьевского типа, вырожденный поток матриц, условие Шоуолтера-Сидорова.

Аннотация: Задача восстановления входного сигнала по известному выходному сигналу и информации об измерительном устройстве (ИУ) является одной из важных задач динамического измерения. Данная задача может быть описана разными способами, от которых зависит методы ее решения. В докладе приводится описание этого процесса с помощью задачи оптимального динамического измерения (ОДИ) при наличии детерминированного мультипликативного воздействия, которое может описывать изменение во времени параметров ИУ (например, деградацию ИУ в процессе эксплуатации). В данной работе предлагается это воздействие описывать интегрируемой скалярной положительной функцией. Доклад состоит из двух частей. В первой приводится постановка задачи ОДИ с мультипликативным детерминированным воздействием, а во второй описывается решение этой задачи.

1. Задача оптимального динамического измерения

В теории динамических измерений [1] важную роль играют задачи восстановления входного сигнала по известному выходному сигналу и информации об измерительном устройстве (ИУ). Данную задачу можно рассматривать как обратную задачу и решать ее соответствующими методами (см. например, [2–4]). Другим распространенным способом решения этой задачи является метод, основанный на использовании методов теории автоматического управления [6–8]. Задача оптимального динамического измерения (ОДИ) [9–12] это математическая модель, основанная на теории оптимального управления решениями уравнений леонтьевского типа [13, 14]. Основой этого метода является поиск минимума функционала штрафа от нормы разности реального (т.е. зафиксированного на измерительном приборе) и виртуального (т.е. найденного посредством вычислительного алгоритма) наблюдений. Этот минимум объявляется оптимальным динамическим измерением. Описание задачи восстановления динамически искаженного сигнала с помощью задачи ОДИ позволяет, во-первых, восстанавливать искомый вход без перехода в частотную область, а во-вторых, данный общий подход позволяет рассматривать данный измерительный процесс при более сложных условиях [15–17].

В качестве математической модели ИУ будем рассматривать систему уравнений леонтьевского типа

$$(1) \qquad L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Du(t), \qquad y(t) = b(t)Nx(t) + Fu(t),$$

где D, N, F – квадратные матрицы порядка n, $x(t) = \mathrm{col}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $y(t) = \mathrm{col}(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ и $u(t) = \mathrm{col}(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))$ – вектор-функции, $a(t)$ и $b(t)$ – функции. Здесь матрицы L, M, D, N и F характеризуют конструкцию ИУ, вектор-функция $x = x(t)$ характеризует состояние ИУ, функции $a = a(t)$ и $b = b(t)$ описывают деградацию ИУ при длительной эксплуатации, вектор-функция $u = u(t)$ соответствует входному сигналу (*измерению*), а вектор-функция $y = y(t)$ соответствует выходному сигналу (*наблюдению*). В системе (1) измерение и наблюдение имеют одинаковую размерность, но на практике размерность наблюдения может быть меньше. Так как система (1) содержит дифференциальное уравнение, то для построения решения необходимо ввести начальное условие. Мы будем его рассматривать в виде условия Шоуолтера-Сидорова

$$(2) \qquad (\mu L - M)^{-1}L(x(t) - x_0) = 0,$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор начальных состояний. Отметим, что при вырожденности матрицы L ($\ker L \neq \{0\}$) условие вида (2) позволяет находить решение системы (1) для любых начальных условий, не проверяя условия согласования.

Основой математической модели ИУ является функционал штрафа

$$(3) \qquad J(u) = \varepsilon \int_0^\tau ||y(t) - \widetilde{y}(t)||^2 dt + (1 - \varepsilon) \int_0^\tau \langle Cx(t), x(t)\rangle dt.$$

Здесь $||\cdot||$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидовы норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $x(t)$ и $y(t)$ линейно зависят от $u(t)$. Используя априорную информацию, в пространстве измерений $\mathfrak{U} = \{u \in L_2((0,\tau); \mathbb{R}^n)$ выделим выпуклое и замкнутое подмножество $\mathfrak{U}_\partial \subset \mathfrak{U}$, которое называется *множеством допустимых измерений*. Минимизируя первое слагаемое функционала (3) на множестве $\mathfrak{U}_\partial$, мы добиваемся минимизации воздействия инерционности ИУ на измерение. А минимизируя второе слагаемое, мы снижаем воздействие резонансов в цепях ИУ. (Заметим, что квадратная симметрическая матрица C порядка n характеризует взаимовлияние резонансов в цепях ИУ). Константа $\varepsilon \in (0, 1)$ выбирается таким образом, чтобы учесть предпочтения исследователя. Наконец, $\widetilde{y}(t)$ – наблюдение полученное в результате вычислительного или натурного эксперимента. Итак, задача поиска *оптимального измерения* $v(t)$ заключается в поиске минимума

$$(4) \qquad J(v) = \min_{u \in \mathfrak{U}_\partial} J(u).$$

Таким образом, математической моделью ИУ является *задача оптимального динамического измерения* (1)–(4).

С целью упрощения в данной работе предполагается, что матрицы в системе (1) имеют более простой вид, что позволяет ослабить требования на функцию $a(t)$, мультипликативное воздействие на измерительное устройство.

2. Решение задачи оптимального динамического измерения

Пусть L и M квадратные матрицы порядка n. Назовем матрицу M *регулярной относительно матрицы* L (коротко, L-регулярной), если существует число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$. Понятно, что число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$, существует, если $\det L \neq 0$. Однако, внимательный анализ реальных ИУ [18, 19] показывает, что случай $\det L = 0$ встречается довольно часто. Итак, пусть матрица M L-регулярна, тогда [20, гл.12] существуют такие невырожденные матрицы A и B порядка n, что $BLA = \operatorname{diag}\{\overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_1}, \overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_2}, \dots, \overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_l}, \mathbb{I}_{n-m}\}$, $BMA = \operatorname{diag}\{\mathbb{I}_m, S\}$, где $\overset{0}{\mathfrak{J}}_{p_k}$ – жорданова клетка порядка p_k с нулями на главной диагонали, $\sum\limits_{k=1}^{l} p_k = m$, $\mathbb{I}_k$ – единичная матрица порядка k, S – квадратная матрица порядка $n-m$. Возьмем число $p = \max\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ и назовем L-регулярную матрицу M (L,p)-*регулярной.* Будем рассматривать случай $p = 0$, что позволить упростить вид решения. Кроме того, в основных приложениях обычно $p = 0$.

Фиксируем число $\tau \in \mathbb{R}_+$ и возьмем в качестве пространства измерений $\mathfrak{U}$, наблюдений $\mathfrak{Y}$ и состояний $\mathfrak{X}$ пространство $L_2((0,\tau);\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. *Пусть матрица M $(L,0)$ – регулярна. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a \in L_2([0,\tau];\mathbb{R}_+)$, $b \in L_2([0,\tau];\mathbb{R})$ и $u \in \mathfrak{U}$, существует единственное решение $y \in \mathfrak{Y}$ задачи* (1), (2), *которое к тому же имеет вид*

$$y(t) = b(t)Nx(t) + Fu(t), \qquad \text{где} \tag{5}$$

$$x(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s)L_1^{-1}QDu(s)ds + M_0^{-1}(Q - \mathbb{I}_n)\frac{Du(t)}{a(t)}. \tag{6}$$

Здесь $X(t,s) = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\left(L - \frac{1}{k}\int_0^t a(r)dr\, M\right)^{-1} L\right)^k$ – *вырожденный поток* [14], т.е. $X(t,r)X(r,s) = X(t,s)$ при всех t, r, $s \in \mathbb{R}$ таких, что $t \geqslant r \geqslant s$, причем $X(t,t) \neq \mathbb{I}_n$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

$$P = \lim_{k\to\infty}\left(k\,(kL-M)^{-1}L\right)^k, \qquad Q = \lim_{k\to\infty}\left(kL\,(kL-M)^{-1}\right)^k,$$

$$M_0^{-1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}L - M\right)^{-1}(\mathbb{I}_n - Q), \quad L_0 = L(\mathbb{I}_n - P), \quad L_1^{-1} = \lim_{k\to\infty}\left(L - \frac{1}{k}M\right)^{-1}Q.$$

Заметим, что (6) по сути заменяет в системе (1) первое уравнение.

Теперь сформулируем теорему о существовании решения задачи оптимального измерения (1)–(4).

Теорема 2. *Пусть матрица M $(L,0)$ – регулярна. Тогда для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y} \in \mathfrak{Y}$, $a \in L_2([0,\tau];\mathbb{R}_+)$ и $b \in L_2([0,\tau];\mathbb{R})$ существует единственное решение $v \in \mathfrak{U}_\partial$ задачи оптимального измерения* (1)–(4).

Вектор-функцию $v = v(t)$, существующую по Теореме 2, будем называть точным оптимальным измерением. Алгоритм построения приближенного оптимального измерения, а также сходимость его к точному, описаны в [21].

Отметим также, что по которому наблюдение $\widetilde{y}(t)$ строится оптимальное измерение может быть подвержено случайным воздействиям и кроме того, для нахождения значения интеграла в функционале (3) необходимо определять значение наблюдения в любой точке интервала $(0, \tau)$. Для подобной интерполяции могут быть использованы различные методы. Один из них, опирающийся на некоторую априорную информацию о виде входящего сигнала, описан в [22].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20037, https://rscf.ru/project/20-11-20037/.

Список литературы

1. Грановский В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
5. Шестаков А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Челябинск: Изд.центр ЮУрГУ, 2013.
6. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970.
7. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
8. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
9. Шестаков А.Л., Свиридюк Г.А. Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2010. No. 16 (192). С. 116–120.
10. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. The Theory of Optimal Measurements // J. Comp. Eng. Math. 2014. Vol. 1, No. 1. P. 3–15.
11. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Keller A.V. Optimal measurements // XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry". 2015. ID 116100.
12. Shestakov A.L., Sagadeeva M.A., Manakova N.A., Keller A.V., Zagrebina S.A., Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A. Optimal dynamic measurements in presence of the random interference // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1065, No. 21. ID 212012.
13. Keller A.V. On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of Leontieff type // J. Comp. Eng. Math. 2015. Vol. 2, No. 2. P. 39–59.
14. Keller A.V., Sagadeeva M.A. Degenerate matrix groups and degenerate matrix flows in solving the optimal control problem for dynamic balance models of the Economy // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 325. Cham: Springer, 2020. P. 263–277.
15. Шестаков А.Л., Келлер А.В., Назарова Е.И. Численное решение задачи оптимального измерения // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 107–115.
16. Keller A.V., Shestakov A.L., Sviridyuk G.A., Khudyakov Y.V. The numerical algorithms for the measurement of the deterministic and stochastic signals // Semigroups of Operators – Theory and Applications. SOTA 2013. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 113. Cham: Springer, 2015. P. 183–195.
17. Sagadeeva M.A. Mathematical bases of optimal measurements theory in nonstationary case // J. Comp. Eng. Math. 2016. Vol. 3, No. 3. P. 19–32.
18. Khudyakov Yu.V. On mathematical modeling of the measurement transducers // J. Comp. Eng. Math. 2016. Vol. 3. No. 3. P. 68–73.

19. Khudyakov Yu.V. On adequacy of the mathematical model of the optimal dynamic measurement // J. Comp. Eng. Math. 2017. Vol. 4. No. 2. P. 14–25.
20. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
21. Шестаков А.Л., Загребина С.А., Манакова Н.А., Сагадеева М.А., Свиридюк Г.А. Алгоритм численного нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства // Автоматика и телемеханика. 2021. № 1. С. 55–67.
22. Сагадеева М.А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2019. Т. 12, № 2. С. 82–96.