

УДК (330.46)

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ДИНАМИКОЙ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ

Т.А. Алексеева

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Россия, 194100, Санкт-Петербург, Кантемировская ул., 3А

E-mail: talekseeva@hse.ru

Н.В. Кузнецов

Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, 198504, Петергоф, Санкт-Петербург, Университетский пр., 28

E-mail: nkuznetsov239@mail.ru

Ключевые слова: математические модели экономики, нелинейная динамика.

Аннотация: Обсуждается комплексный подход для прогнозирования и управления нерегулярной динамикой в экономике, основанный на современных аналитико-численных методах анализа динамических систем и технологиях искусственного интеллекта. Эффективность подхода демонстрируется на примере анализа ряда актуальных экономических моделей, для получения новой информации о поведении экономических механизмов и расширении спектра используемых моделей.

1. Введение

В экономике нерегулярная динамика может создавать трудности для прогнозирования, управления и разработки экономической политики. Нерегулярность может иметь эндогенную природу, т.е. порождаться детерминированными силами, действующими внутри экономического механизма, или быть следствием экзогенных случайных шоков [1]. Важный вклад в становление отдельного направления исследования детерминированной нерегулярной динамики в экономике (см., например, [5–7]) внесли работы нобелевских лауреатов П. Самуэльсона [2], П. Даймонда [3] и Х. Зонненшайна [4]. В рамках этого направления для моделирования и прогнозирования долгосрочного поведения экономики выводились различные динамические модели экономического поведения и использовались классические методы анализа динамических систем.

Существенное развитие за последние годы вычислительных средств, технологий искусственного интеллекта и отдельных направлений теории динамических систем делают актуальной задачу пересмотра методов анализа предельной динамики математических моделей экономики и разработку *комплексного подхода*

с привлечением современных аналитико-численных методов для улучшения прогнозирования, управления, валидации существующих и построение новых экономических моделей с учетом получаемых условий и ограничений.

2. Принципы вывода моделей и постановка задач

Для описания концепции и функционирования экономического механизма в виде математической модели используется информация, которая определяет принципы вывода или выбора из некоторого множества соответствующих моделей (в т.ч. теоретические положения научной теории, описывающей класс моделируемых экономических объектов, предпосылки модели, допустимые значения показателей, возможные методы). При этом можно выделить следующие принципы, которые широко используются при выводе актуальных детерминированных динамических моделей экономики. В рамках принципа оптимальности модели выводятся как решения некоторых оптимизационных задач с набором ограничений. Этот принцип широко применяется в задачах теории фирмы, теории потребителя, теории игр и принятия решений, в классических [8, 9] и современных [10–15] моделях общего равновесия и др. Если не ставится задача рассмотрения экономики в целом, что типично для вычислимых моделей общего равновесия [12, 16], и, соответственно, полного вывода концептуальной модели (учитывающей взаимосвязи и взаимозависимости между ценами товаров и факторами производства в одновременном равновесии всех рынков, анализировать обратную связь при изменении каких-либо показателей), а каждая фирма считается независимой или самодостаточной (в частности, при изучении отдельного рынка), вывод может опираться на принцип анализа частичного равновесия [17, 18]. При этом часть переменных (например, функция спроса) непосредственно постулируется, а принцип оптимальности либо не используется, либо уже учтен в постулируемых предположениях относительно переменных. Также модели можно выводить из общих принципов какой-либо экономической теории в предположении об эффектах, которые могут проявляться в рассматриваемом экономическом механизме. В этом случае структура модели отражает заданные функциональные зависимости между переменными и параметрами (см., например, [20]).

Прогнозирование, анализ и управление динамикой в экономике с помощью математических моделей отражают известный девиз фон Неймана: *All stable processes we shall predict. All unstable processes we shall control.* Для этого решаются задачи выявления возможных установившихся поведений динамической системы после переходных процессов (задача выявления аттракторов и бассейнов их притяжения в фазовом пространстве системы) и разбиения пространства параметров системы на области, для которых существуют определенные конфигурации аттракторов. В случаях отсутствия в системе аттракторов с регулярным поведением (стационарным или периодическим) или выявления аттракторов с нерегулярным поведением ставится задача введения в математическую модель дополнительного управления (с учетом возможности его соответствующей реализации в экономической модели) для появления в поведении системы регулярного аттрактора.

3. Комплексный подход для решения задач

Обширная литература по исследованию динамики в детерминированных математических моделях экономики в основном содержит применение классических методов теории динамических систем для аналитического анализа низкоразмерных, преимущественно двумерных, моделей (см. например, [21, 22]) и стандартный численный анализ многомерных моделей и временных рядов (см., например, [23, 24]). При этом возможности применения числительных методов ограничены трудностями, связанными с обеспечением точности численного интегрирования отдельных траекторий на длинных интервалах времени и необходимостью нелокального анализа всего фазового пространства и пространства параметров.

Современный этап развития ряда направлений в анализе динамических систем (таких, как теория скрытых колебаний и глобальной устойчивости [25, 26], теория размерности [27], теория управления хаосом [28], интервальный анализ [29] и технологии искусственного интеллекта) стимулировал появление новых эффективных аналитических и аналитико-численных методов для анализа и управления предельной динамикой, и сделал актуальным их применение для изучения моделей в экономике. Разработанные в теории глобальной устойчивости методы позволяют выделять в пространстве параметров консервативные (внутренние) оценки области глобальной устойчивости динамической системы. В случае потери устойчивости стационарного множества, в том числе связанной с нелокальными бифуркациями, для анализа сценариев рождения нетривиальных колебаний в фазовом пространстве системы используются методы теории бифуркаций и теории скрытых колебаний [25, 27]. При этом для анализа самовозбуждения колебаний и рождения самовозбуждающихся аттракторов, а также определяемых ими тривиальных участков границ глобальной устойчивости, можно эффективно использовать классические аналитические и численные методы. Анализ нелокального рождения скрытых колебаний и аттракторов, а также определяемых ими скрытых участков границ глобальной устойчивости, требует применения специальных аналитико-численных процедур. Для выявления аттракторов и бассейнов их притяжения при заданных параметрах применяются аналитические методы локализации и численное интегрирование для сетки точек из получаемого ограниченного поглощающего множества на конечных временных интервалах. В теории размерности разработаны аналитические и численные методы определения различных характеристик нерегулярного поведения. Методы управления хаосом, интервальный анализ и технологии искусственного интеллекта позволяют синтезировать регулярное поведение при помощи малого управления. Развитию и применению такого комплексного подхода к изучению нерегулярной динамики в детерминированных моделях экономики посвящена данная работа.

4. Примеры вывода и анализа моделей

На примере модификаций ряда актуальных экономических моделей в работе демонстрируется реализация каждого из описанных выше основных принципов вывода для построения соответствующих математических моделей. Как решения оптимизационных задач получены разновидности модели перекрывающихся

поколений с переменной управления в виде государственных расходов, новокейнсианской модели с управляющими правилами монетарной и фискальной политики. Анализ частичного равновесия использован при выводе пространственно-временной модели ценообразования на сетевом глобальном рынке краткосрочного товара. В структуре модели средней фирмы отражены заданные функциональные зависимости, характерные для взаимосвязей между переменными и параметрами соответствующего механизма.

Для этих моделей показывается эффективность применения предлагаемого подхода для решения поставленных задач. В том числе демонстрируется вывод условий глобальной устойчивости; аналитическая и численная локализация аттракторов; количественная оценка нерегулярной динамики с помощью ляпуновских показателей; выявление и стабилизация неустойчивых периодических траекторий для подавления хаотического поведения в моделях, а также максимизация областей притяжения стабилизированных траекторий с помощью специальных аналитико-численных процедур, эволюционных алгоритмов и обучения с подкреплением; прогнозирование динамики в областях управляющих параметров с различными режимами экономической политики [30–39].

5. Заключение

Возможности соединения классических и развитых за последние годы теоретических методов анализа динамических систем с численными алгоритмами и технологиями искусственного интеллекта делают перспективным предлагаемый комплексный подход к прогнозированию, анализу и управлению нерегулярной динамикой в математических моделях экономики. Эффективность предлагаемого подхода демонстрируется на примере ряда актуальных экономических моделей.

Список литературы

1. Beaudry P., Galizia D., Portier F. Putting the cycle back into business cycle analysis. // *American Economic Review*. 2020. 110(1). P. 1–47.
2. Samuelson P.A. An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money // *Journal of Political Economy*. 1958. 66(6). P. 467–482.
3. Diamond P. National debt in a neoclassical growth model // *American Economic Review*. 1965. 55(5). P. 1126–1150.
4. Sonnenschein H. Market excess-demand functions // *Econometrica*. 1972. 40(3). P. 549–563.
5. Medio A. *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. CUP, 1992.
6. Zhang W. *Synergetic Economics*. Springer Berlin Heidelberg, 1991.
7. Rosser J. *From catastrophe to chaos: A general theory of economic discontinuities*. Vol. 1. Mathematics, Microeconomics, Macroeconomics, and Finance. Springer, 2000.
8. Walras L. *Elements of Pure Economics*. Homewood, Ill: Richard D. Irwin Inc., 1954.
9. McKenzie L.W. *Classical general equilibrium theory*. MIT Press, 2002.
10. Dixon P., Jorgenson D. W. *Handbook of Computable General Equilibrium Modeling*. North Holland, 2013. Vols. 1A, 2A.
11. Smets F., Wouters R. Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach // *American Economic Review*. 2007. 97(3). P. 586–606.
12. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бахтизина Е.Л. CGE модель социально-экономической системы России со встроеными нейронными сетями. М.: ЦЭМИ РАН, 2005. 152 с.
13. Новиков Д.А., Ашимов А.А., Султанов Б.Т., Адилов Ж.М., Боровский Ю.В., Нижегородцев Р.М., Ашимов А.А. *Макроэкономический анализ и экономическая политика на базе параметрического регулирования*. М.: Физматлит, 2010. 284 с.

14. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Логинов Е.Л. Применение экономико-математических методов и моделей оптимального планирования в цифровой экономике будущего. М.: ЦЭМИ РАН, 2022. 248 с.
15. Асеев С.М., Вельов В.М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // УМН. 2019. Т. 74, № 6. С. 3–54.
16. Burfisher M.E. Introduction to Computable General Equilibrium Models / 3rd ed. CUP, 2021.
17. Marshall A. Principles of Economics / 8th ed. Macmillan and Co, 1920.
18. Francois J.F., Hall H.K. Partial Equilibrium Modeling // Applied Methods for Trade Policy Analysis: A Handbook / Eds. J.F. Francois, K.A. Reinert. CUP. P. 122–155.
19. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. OUP, 1995. 538 p.
20. Zhang W. Chaos, Complexity, and Nonlinear Economic Theory. WS, 2023.
21. Brock W., Sayers C.L. Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos? // Journal of Monetary Economics. 1998. Vol. 22. P. 71–90.
22. Hommes C. Handbook of Computational Economics // Elsevier, 2006. Vol. 2. P. 1109–1186.
23. Sugihara G., May R. Nonlinear Forecasting as a Way of Distinguishing Chaos from Measurement Error in Time Series // Nature. 1990. Vol. 344 (6268). P. 734–741.
24. Sanders J., Farmer J., Galla T. The prevalence of chaotic dynamics in games with many players // Scientific Reports. 2018. Vol. 8. P. 4902.
25. Кузнецов Н.В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 5–27.
26. Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M. et al. The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // 2020 European Control Conference Proceedings. 2020. P. 769–774.
27. Kuznetsov N., Reitmann V. Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation. Springer, 2021.
28. Chaos Control: Theory and Applications / Eds. G. Chen, X. Yu. Springer, 2003.
29. Tucker W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Series I. Mathematics. 1999. Vol. 328 (12). P. 1197–1202.
30. Alexeeva T., Barnett W., Kuznetsov N., Mokaev T. Dynamics of the Shapovalov mid-size firm model // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. Vol. 140. P. 110239.
31. Alexeeva T., Kuznetsov N., Mokaev T. Study of irregular dynamics in an economic model: attractor localization and Lyapunov exponents // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. Vol. 152. P. 111365.
32. Alexeeva T., Barnett W., Kuznetsov N. et al., Mokaev T. Time delay control for stabilization of the Shapovalov mid-size firm model // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, No. 2). P. 16971–16976.
33. Kuznetsov N., Alexeeva T., Leonov G. Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 85 (1). P. 195–201.
34. Alexeeva T., Diep Q.-B., Kuznetsov N., Zelinka I. Forecasting and stabilizing chaotic regimes in two macroeconomic models via artificial intelligence technologies and control methods // Chaos, Solitons & Fractals. 2023. Vol. 170. P. 113377.
35. Alexeeva T., Mokaev T., Polshchikova I. Dynamics of Monetary and Fiscal Policy in a New Keynesian Model in Continuous Time // Differential Equations and Control Processes. 2020. No. 4. P. 88–114.
36. Alexeeva T., Kuznetsov N., Mokaev T., Polshchikova I. Macroeconomic Model with Monetary and Fiscal Policy and Externality: Nonlinear dynamics, Optimization and Control // IFAC-PapersOnLine. 2021. Vol. 54, No. 17. P. 26–31.
37. Alexeeva T., Kuznetsov N., Mokaev T., Polshchikova I. Optimal control in the New Keynesian model with monetary and fiscal policy interactions // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1864. P. 012040.
38. Alexeeva T., Kuznetsov N., Lobachev M. et al. Complex dynamics and optimal control of monetary policy in a New Keynesian model with government debt // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55, No. 40. P. 157–162.
39. Alexeeva T., Kuznetsov N., Mokaev T., Posudin K. Modeling and stabilization of an irregular pricing mechanism on a network of local markets // Differential Equations and Control Processes. 2023. No. 4. P. 53–66.