УДК 519.71+519.8

ДИНАМИКА МНОГОМЕРНЫХ МНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ДОВЕРИЕМ

И.С. Забарянская
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., 29
E-mail: akshiira@yandex.ru

А.В. Проскурников
АО Навис
Россия, 199106, Санкт-Петербург, 22 линия В.О., д.3, к.5, лит. Е
E-mail: avp1982@gmail.com

Ключевые слова: Агентные модели, динамика мнений, социальные сети.

Аннотация: Рассматривается обобщение модели динамики мнений с ограниченным доверием на случай многомерных мнений. Многомерное мнение характеризует позицию человека по теме, включающей несколько подтем, либо его отношение к некоторому объекту или событию, описываемому набором характеристик. В отличие от имеющихся моделей, доверительное множество агента не обязательно является шаром в некоторой норме, а может иметь произвольную структуру и меняться с течением времени. Решается задача о сходимости модели динамики мнений при условии однородности агентов, исследована структура финальных мнений. Показано, что в некоторых случаях имеет место сходимость мнений за конечное время. Результаты подтверждены численными экспериментами.

1. Введение

Информатизация общества и развитие социальных медиа – мобильных и веб-сервисов, форумов, мессенджеров и др. – дали существенный импульс исследованию социальных сетей и протекающих в них процессов, в частности, информационных связей и динамических механизмов социального влияния между агентами (индивидуумами, организациями) и принятия ими решений [1, 2]. Многие из этих процессов могут быть представлены как динамика формирования *мнений* социальных агентов. Слово «мнение» при этом обозначает некоторую численную характеристику агента, которая может меняться в результате взаимодействия с другими агентами или внешней информационной средой.

Одно из типичных свойств, постулируемых многими моделями динамики мнений – наличие эффекта последовательного усреднения: в результате взаимодействия с другими людьми, мнение индивидуума заменяется выпуклой комбинацией их мнений и его собственного мнения. Отметим, что в настоящее время имеются экспериментальные подтверждения данного принципа [3, 4]. Вместе с тем, вопрос о том, кому именно из окружающих люди склонны доверять и как формируются веса усреднения, остается открытым. В докладе рассматривается класс моделей, который берет начало в работе Хегсельманна и Краузе [5] и отражает другое свойство социального влияния – склонность индвидуума доверять мнениям, которые близки к его собственному, придавая малый вес всем прочим мнениям либо полностью их игнорируя. В исходной работе [5] мнение агента – скалярная величина, а близость мнений определяется модулем их разности: два мнения близки, если их разность по модулю не превышает заданного порога $\varepsilon > 0$. На каждом шаге новое мнение агента формируется как среднее арифметическое всех близких мнений.

В докладе исследуется модель, которая является естественным обобщением модели Хегсельманна-Краузе на случай, когда мнение может быть многомерным (например, мнение о том, как наилучшим образом распределить ресурс между несколькими получателями) [4], а «близость» двух мнений определяется как принадлежность их разности некоторому доверительному множество. В существующих работах такое множество является шаром в евклидовой норме [6] или, реже, иных нормах, таких как ℓ_∞ [7]. В изучаемой ниже модели доверительное множество не только не является шаром, но может быть также неограниченным.

Одним из важных вопросов при исследовании динамики мнений является асимптотическое поведение мнений, в частности, стабилизируются ли мнения за конечное или бесконечное время, а также структура предельных мнений. В докладе получено достаточное условие сходимости мнений, основанное на ранее установленных свойствах консенсусных алгоритмов. Существующие в литературе подходы к изучению моделей с ограниченным доверием основаны либо на свойствах монотонности, которые лишь частично распространяются на многомерный случай [7, 8], либо на использовании специальных функций Ляпунова [6, 8], которые существенно используют структуру доверительного множества (шар в евклидовой норме). Установленный в докладе критерий сходимости обобщает эти результаты на доверительные множества достаточно общего вида.

2. Постановка задачи

Рассматривается группа из n индивидуумов (социальных агентов), мнения которых меняются в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \ldots$ Мнение агента $i \in \{1, \ldots, n\}$ в момент времени t является вектором $\xi^i(t) = (\xi^i_1(t), \ldots, \xi^i_d(t)) \in \mathbb{R}^d$. Интерпретация векторного мнения может быть различной. С одной стороны, такое мнение может выражать отношение индивидуума к некоторому объекту, который принципиально не описываем одной скалярной величиной, например, мнение о наилучшем распределении некоторого ресурса (материального, финансового и т.д.) между несколькими получателями [4]. С другой стороны, многомерное мнение может выражать позиции индивидуума по d различным темам [9]; в этом случае, $\xi^i_j(t)$ соответствует позиции агента i по отношению к j-ой теме, $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

При формировании собственного мнения каждый из агентов принимает во внимание только мнения, которые достаточно «близки» к его собственному мнению. «Близость» в момент времени t характеризуется доверительным множеством $\mathcal{O}(t) \subseteq \mathbb{R}^d$, которое может зависеть от времени и быть неограниченным. Более

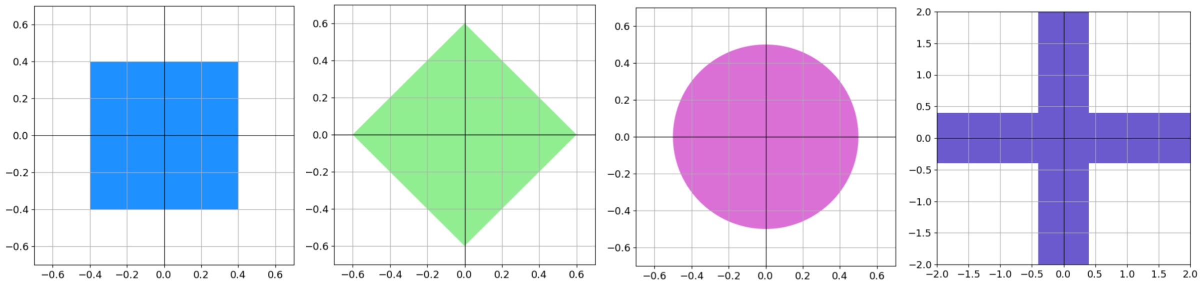

Рис. 1. Примеры доверительных множеств

точно, в момент времени t агент i учитывает мнения агентов из множества

$$\mathcal{N}_i(t) \triangleq \{j : \xi^j(t) \in \xi^i(t) + \mathcal{O}(t)\}.$$

Формально $\mathcal{N}_i$ зависит не только от времени, но и от всего семейства мнений $(\xi^j(t))_{j=1}^n$, но мы будем писать $\mathcal{N}_i(t)$ для краткости записи. Предполагается, что $\mathbf{0} \in \mathcal{O}(t)$, то есть агент доверяет собственному мнению: $i \in \mathcal{N}_i(t)$.

На каждом шаге мнение агента i формируется в результате усреднения «близких» мнений, что приводит к следующей динамической системе

$$\xi^i(t+1) = \frac{1}{|\mathcal{N}_i(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \xi^j(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

На рис. 1 изображены примеры доверительных множеств $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ (слева направо): шары в ℓ_∞ норме; ℓ_1 норме и ℓ_2 норме, а также неограниченное множество $\mathcal{O} = \{\xi : \min_{i \in \{1,2\}} |\xi_i| \leqslant 0.4\}$. Последнее множество соответствует случаю, когда каждый из агентов доверяет тем людям, чье мнение по одной из тем близко к его собственному мнению; отметим, что это множество неограничено и невыпукло.

3. Сходимость мнений

В докладе изучается асимптотическое поведение системы (1). Именно, исследуется сходимость мнений и их предельные значения при $t \to \infty$ (в стационарном случае, когда $\mathcal{O}$ не зависит от времени, эти значения будут также являться равновесиями системы). Получены также условия остановки системы за конечное число шагов при произвольных начальных данных.

Основным результатом является следующая теорема, которая выводится из общего результата о сходимости консенсусных алгоритмов (лемма 6 в статье [8]).

Теорема 1. *Пусть доверительное множество симметрично:* $\mathcal{O}(t) = -\mathcal{O}(t)$ *при всех* $t \geqslant 0$. *Тогда мнения, описываемые системой* (1), *сходятся к конечным пределам* $\xi^i(\infty) \triangleq \lim_{t\to\infty} \xi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

Если, кроме того, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ *является внутренней точкой множества* $\bigcap_{t \geqslant 0} \mathcal{O}(t)$, *то мнения перестают меняться после конечного числа шагов:* $\xi^i(t) = \xi^i(t+1)$ *при достаточно больших* t.

Теорема 1 не уточняет, как устроены финальные мнения социальной группы. В силу весьма сложной нелинейной динамики, предсказать их зависимость от начального набора мнений не представляется возможным. Вместе с тем, при некоторых условиях можно классифицировать все возможные предельные мнения, как показывает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть доверительное множество $\mathcal{O}$, удовлетворяющее условия теоремы 1, не зависит от времени. Набор мнений $(\xi_i^*)_{i=1}^n$ является равновесием системы* (1) *тогда и только тогда, когда любые два мнения из этого набора либо совпадают $\xi_i^* = \xi_j^*$, либо не являются «близкими»: $\xi_i^* - \xi_j^* \notin \mathcal{O}$. Если при этом множество $\mathcal{O}$ имеет* $\mathbf{0}$ *внутренней точкой, то любое решение системы* (1) *сходится (за конечное время) к одному из положений равновесия.*

Численное моделирование. Следующий график моделирует поведение траекторий системы (1) для доверительных множеств, изображенных на рис. 1.

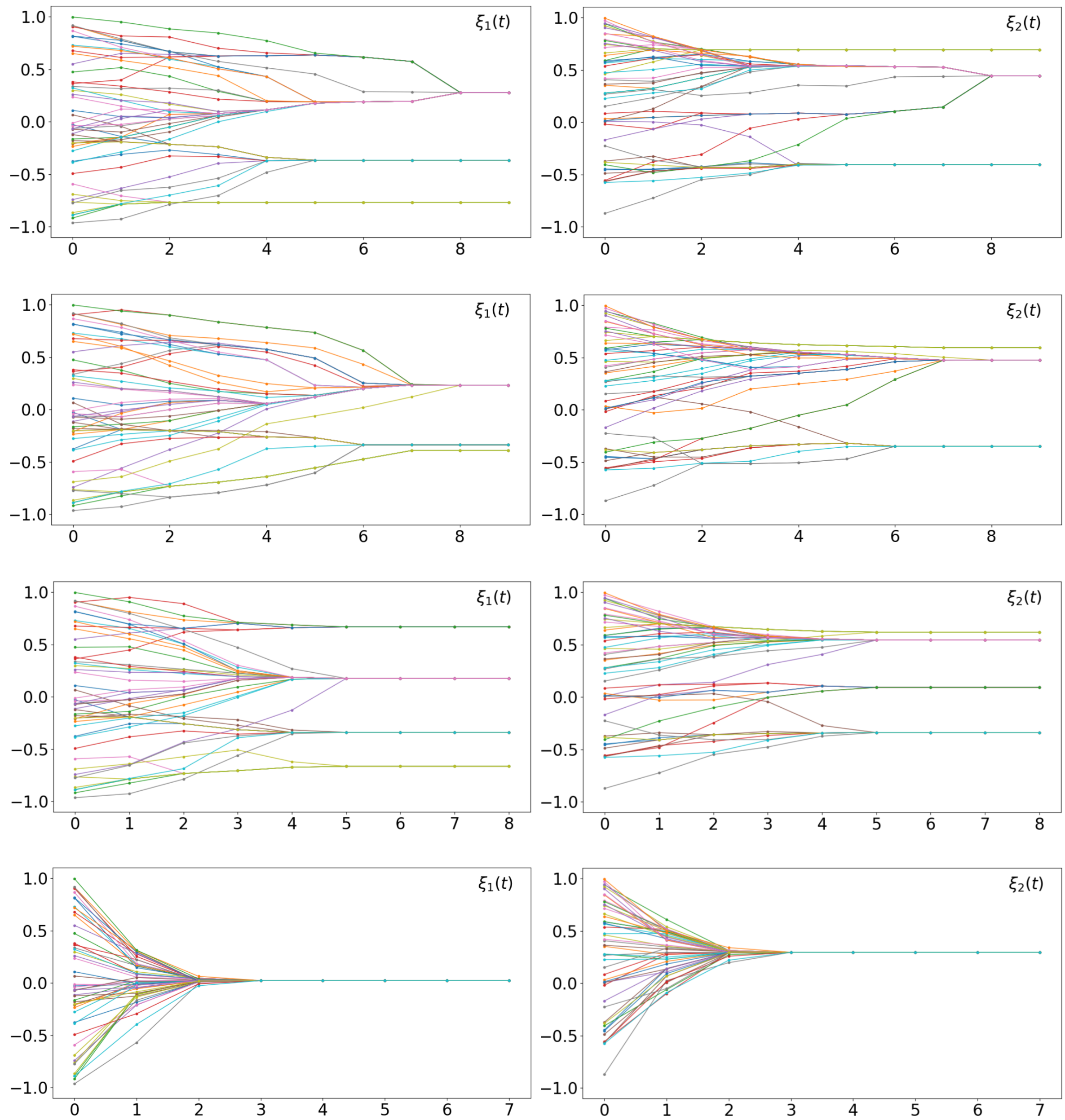

Рис. 2. Траектории системы (1) с различными множествами $\mathcal{O}$

Начальные двумерные мнения (общие для всех экспериментов) были сгенерированы независимо и случайно из $[-1, 1]^2$. В левой и правой частях рис. 2 представлены графики зависимости координат $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, соответственно, от времени. Порядок графиков (сверху вниз) соответствует порядку доверительных множеств на рис. 1.

4. Заключение

Для модели динамики многомерных мнений с ограниченным доверием (1) получен результат о сходимости мнений в случае достаточно произвольных доверительных множеств, содержащих нулевой вектор и обладающих симметрией. При дополнительных предположениях также установлена сходимость мнений за конечное время. Приводяится классификация положений равновесия системы.

Список литературы

1. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Издательство физико-математической литературы, 2010. 228 с.
2. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // Пробл. управл. 2009. № 5 С. 28-35.
3. Козицин И.В. и др. Моделирование политических взглядов российских пользователей социальной сети ВКонтакте // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 8. С. 3—20.
4. Friedkin N.E., Proskurnikov A.V., Mei W., Bullo F. Mathematical Structures in Group Decision-Making on Resource Allocation Distributions // Scientific Reports. 2019. Vol.5, No 1. P. 1377.
5. Hegselmann R., Krause U. Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis, and Simulation // Journal of Artifical Societies and Social Simulation. 2002. Vol. 5, No. 3.
6. Nedic A., Touri B. Multi-dimensional Hegselmann–Krause dynamics // 51st Conference on Decision and Control. Grand Wailea Maui, United States. 2012. P. 68–73.
7. De Pasquale G., Valcher M.E. Multi-dimensional extensions of the Hegselmann-Krause model // 61st Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico. 2022. P. 3525–3530.
8. Bernardo C., Altafini C., Proskurnikov A., Vasca F. Bounded confidence opinion dynamics: A survey // Automatica. 2024. Vol. 159. P. 111302.
9. Parsegov S.E., Proskurnikov A.V, Tempo R., Friedkin N.E. Novel Multidimensional Models of Opinion Dynamics in Social Networks // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. AC-62, No. 5. P. 2270–2285.