

# СИСТЕМА ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

**В.Н. Сизых**

*Иркутский государственный университет путей сообщения*  
Россия, 664074, Иркутск, Чернышевского ул., 15  
E-mail: sizykh\_vn@mail.ru

**Р.А. Данеев**

*Восточно-Сибирский институт МВД России*  
Россия, 664074, Иркутск, Лермонтова ул., 110  
E-mail: romasun@mail.ru

**Ключевые слова:** приближенно-оптимальный синтез, оптимальное управление в реальном (ускоренном) масштабе времени.

**Аннотация:** Изложен новый подход к аналитическому конструированию линейных и нелинейных интегрированных систем автоматического управления (САУ) реального (ускоренного) масштаба времени, основанный на совместном использовании технологий динамического программирования и метода квазилинеаризации.

## 1. Введение

Управление – создание в каждый текущий момент времени целенаправленных воздействий на объект управления в зависимости от доступной информации о поведении объекта и действующих на него возмущениях. В теории управления рассматриваются три принципа управления: 1) по разомкнутому контуру, 2) по замкнутому контуру, 3) в реальном (ускоренном) времени. При использовании первого принципа до начала процесса управления по априорной информации строится программа (программное управление), которая в процессе управления не корректируется. При втором принципе управления текущие управляющие воздействия (позиционные управления) создаются по заранее (до начала процесса управления) составленным правилам, определенным на всевозможной информации, которая может появиться о поведении объекта и действующих на него возмущений в процессе управления. Эти правила реализуются в форме прямых, обратных и комбинированных связей.

Разработаны эффективный метод совмещенного синтеза и процедуры решения двухточечной краевой задачи по схеме дифференциального динамического программирования (ДП), обеспечивающие поинтервальную монотонно убывающую (релаксационную) сходимость процессов управления по необходимым условиям локальной оптимальности. Сформулированы основные теоремы и приводится один из

вариантов алгоритмической реализации метода. Необходимость в такой разработке обусловлена фактическим отсутствием надежных методов нелинейного синтеза цифровых регуляторов, гарантирующих высокую точность и устойчивость решения при приемлемых вычислительных затратах.

## 2. Постановка задачи

Под оптимизацией непрерывных процессов управления будем понимать решение задачи выбора на отрезке времени  $T = [t_0, t_k]$  позиционного управления

$$(1) \quad u = u(t_0, x(t_0), t, x(t))$$

для динамической системы

$$(2) \quad \dot{x} = f(t, x, u)$$

такого, чтобы на траектории движения объекта  $x(t)$ , удовлетворяющей заданным ограничениям на множествах начального и конечного состояний

$$(3) \quad \mu(t_0, x(t_0), t_k, x(t_k)) = 0, \quad \mu \in R^p,$$

Функционал

$$(4) \quad I = V_3(t_0, x(t_0), t_k, x(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(t, x(t), u(t)) dt, \quad I \in R^1,$$

достигал минимума (максимума) или наименьшей (наибольшей) точной грани (инфимума  $\inf$  или супремума  $\sup$ ). Здесь функции  $f, \mu, V_3$  и  $f_0$  – заданные кусочно-непрерывные по  $t$  и непрерывные и достаточно гладкие по  $x, u$  (дифференцируемые или абсолютно непрерывные) векторные и скалярные функции указанных аргументов.

Граничные условия на левом конце траектории  $x(t_0) = x^0 \in R^n$  выбираются произвольными. Конечные ограничения на граничные условия и на значения управляющих функций и траектории процесса (3) будем записывать как

$$(5) \quad (x(t), u(t)) \in F(t),$$

где  $F(t) \subset G_x \times G_u, G_x = X, G_u = U$  является декартовым произведением множеств топологической степени  $(n + m)$ , зависящим от времени  $t$ .

Множество пар вектор-функций  $\{x(t), u(t)\}$ , удовлетворяющих дифференциальной связи (2) и конечным ограничениям (5), называют множеством допустимых  $D$ . Предполагается, что  $D \neq \emptyset$ .

Пару функций  $\{x_*(t), u_*(t)\} \in D$  будем называть оптимальным процессом (минималю) для  $I$  на  $D$ , если

$$I(x_*(t), u_*(t)) = d.$$

Здесь  $d = \inf_D I(x(t), u(t))$  — нижняя точная грань функционала (4).

Нижнюю точную грань функционала (4) в общей теории экстремальных задач называют опорным функционалом (опорой).

Последовательность  $\{x_s(t), u_s(t)\} \in D$ , на которой

$$I(x_s, u_s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} d,$$

является минимизирующей для функционала  $I$  на множестве  $D$ .

Для того чтобы пара  $(x_{оп}, u_{оп}) \in D$  была минималю в задаче (1)-(5) достаточно существования такой гладкой функции  $\varphi(t, x)$ , чтобы выполнялись условия

$$(6) \quad \mu(t) = R(t, x_{оп}, u_{оп}) = \inf_{(x, u) \in F(t)} R(t, x, u) \text{ для любого } t \in [t_0, t_k],$$

$$(7) \quad \Phi(x_{оп}(t_0), x_{оп}(t_k)) = \inf_{\substack{x(t_0) \in F_x(t_0) \\ x(t_k) \in F_x(t_k)}} \Phi(x(t_0), x(t_k))$$

где включение  $x(t) \in F_x(t)$  определяет ограничение на значения вектора состояния системы (2),  $F_x(t)$  — проекция множества  $F(t)$  на пространство  $X$ .

Учтем в исходных конструкциях (6), (7) тейлоровское разложение функций  $f, f_0$  в малой окрестности локальной минимали  $(x_0(t), u_0(t)) = (x_{\tau}, (t, \tau)_{/\tau=t})$

$$(8) \quad f(t, x, u) = f(t, x_0, u_0) + \frac{\mathcal{J}(t, x_0, u)}{\partial x} \delta x + \frac{\mathcal{J}(t, x, u_0)}{\partial u} \delta u + o_1(|\delta x, \delta u|),$$

$$(9) \quad f_0(t, x, u) = f_0(t, x_0, u_0) + \frac{\mathcal{J}_0(t, x_0, u)}{\partial x} \delta x + \frac{\mathcal{J}_0(t, x, u_0)}{\partial u} \delta u + o_2(|\delta x, \delta u|),$$

Предполагается, что члены разложения выше второго порядка пренебрежительно малы, и принимается, что незначимая функция времени  $\mu(t) = R(t, x_{\text{оп}}, u_{\text{оп}}) = \inf_{(x, u) \in F(t)} R(t, x, u) = 0$ , и достаточные условия (6), (7) с учетом (8), (9)

перепишутся в виде

$$(10) \quad \inf_{x \in F_x} \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) + f_0(t, x_0, u_0) \right) + \inf_{x \in F_x} \left( \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \frac{\mathcal{J}}{\partial x} + \frac{\mathcal{J}_0}{\partial x} \right] \delta x \right) + \\ + \inf_{u \in U} \left( \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} \frac{\mathcal{J}}{\partial u} + \frac{\mathcal{J}_0}{\partial u} \right] \delta u \right) = 0,$$

$$(11) \quad \inf_{\substack{x(t_0) \in F_x(t_0) \\ x(t_k) \in F_x(t_k)}} \left( \left( \frac{\partial V_3(x_0(t_k))}{\partial x(t_k)} - \frac{\partial \varphi(t_k, x_0(t_k))}{\partial x(t_k)} \right) \delta x(t_k) + \frac{\partial \varphi(t_0, x_0(t_0))}{\partial x(t_0)} \delta x(t_0) \right) = 0.$$

Выражения в квадратных скобках формулы (10) могут быть записаны через скалярную функцию  $H(t, x, \varphi_x, u) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f + f_0$ .

Тогда формулу (11) можно представить в виде

$$(12) \quad \inf_{x \in F_x} \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} f(t, x_0, u_0) + f_0(t, x_0, u_0) \right) + \inf_{x \in F_x} \left( \frac{\partial H(t, x_0, \varphi_x, u)}{\partial x} \delta x \right) + \\ + \inf_{u \in U} \left( \frac{\partial H(t, x, \varphi_x, u_0)}{\partial u} \delta u \right) = 0.$$

Соотношение (12) будет характеризовать четыре различные ситуации, каждой из которых соответствуют свои конструкции алгоритмов оптимального управления.

### 3. Пример

Рассмотрим управление квазилинейным колебательным звеном в задаче слежения ( $t_k = t + T_{II}$ )

$$(13) \quad \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_3^3 + bu,$$

где  $a_1 = -2, a_2 = -1, b = 1$ .

Цель управления состоит в стабилизации заданного состояния  $x_1(t_k) = x_{\text{зад}} = -0,4$  при ограничении на управление  $|u| = 2$  и выбранных начальных условиях:  $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$ .

Суть градиентной стратегии – релаксационное расширение пространства состояний (3):  $y = (x, \delta u)$  для схемы дифференциального ДП. Поэтому требуется таким образом переформулировать исходную постановку задачи оптимизации (1)-(5), чтобы была возможность зафиксировать предельные элементы минимизирующих

последовательностей в точках стационарности  $u = u_0$ . Для этого предлагается применить функционал обобщенной работы (ФОР)

$$I(y(\cdot)) = S_3(y(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} [Q_p(\theta, y) + L_{31}(\vartheta) + L_{31}(\vartheta_0)] d\theta,$$

Требуется решить задачу синтеза оптимального управления: через минимизацию функционала обобщенной работы (ФОР)

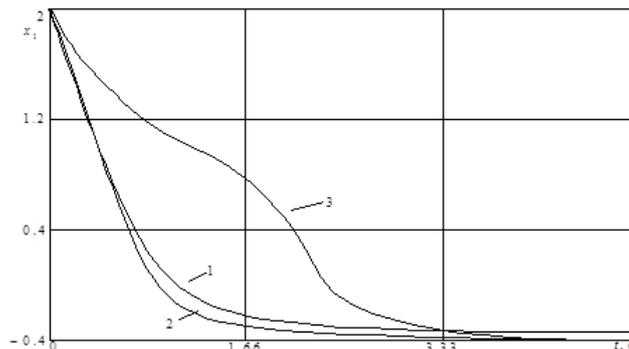
$$(14) \quad I = \int_{t_0}^{t+T_n} \{0,5\beta(x_1(t) - x_{\text{зад}})^2 + u_{\text{он}} k^{-1} u + 0,5r^{-1}(\vartheta^2 + \vartheta_{\text{он}}^2)\} d\theta,$$

реализовать стабилизирующую заданное состояние приближенно – оптимальную стратегию управления  $u(t, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow t} u_{\text{он}}(t, t) = u_0(t)$  и сравнить полученный результат с результатами минимизации критерия взвешенной обобщенной работы (КВОР)

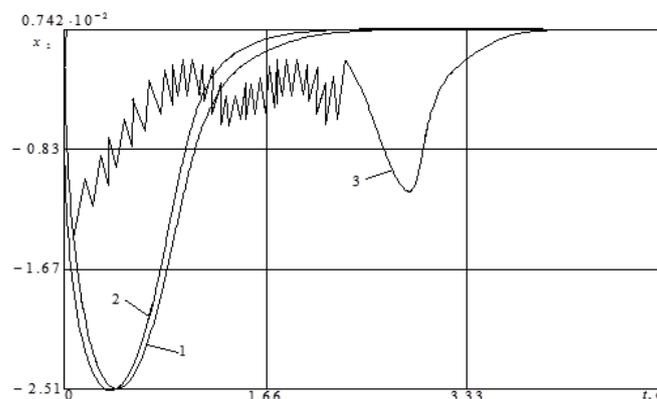
$$(15) \quad I = \int_{t_0}^{t+T_n} \{0,5\beta(x_1(t) - x_{\text{зад}})^2 + u_{\text{он}} k^{-1} u\} d\theta,$$

при релейном  $u = 2 \text{sign } u_{\text{он}}$ ,  $-2 \leq u \leq 2$ ; и релейно-линейном законах управления  $u = 2 \text{sat } u_{\text{он}} : u = 2u_{\text{он}}$ , если  $u \in \text{int } U$ ,  $U \subseteq R^m$ ; и  $u = 2 \text{sign } u_{\text{он}}$ , если  $|u| \geq 2$ .

Результаты минимизации ФОР (14) и КВОР (15) на основе алгоритма модифицированного приведены на рис. 1, 2.



**Рис. 1.** Результаты моделирования при различных стратегиях управления по координате  $x_1$ .



**Рис. 2.** Результаты моделирования при различных стратегиях управления по координате  $x_2$ .

Для проверки работоспособности алгоритма при стратегии совмещенного синтеза  $u \rightarrow u_{оп}$  (кривые 2) и при субоптимальных стратегиях управления (кривые 1, 3) проводился сравнительный анализ численных расчетов.

Сравнительный анализ численных расчетов показывает, что по точности и затратам на управление наиболее предпочтительна приближенно–оптимальная стратегия управления (кривые 2). Точность вычислений здесь обеспечивается за счет поинтервального уточнения точек стационарности локальной минимали при среднем числе итераций  $j = 4 - 6$  на каждой длине оптимизации.

Качественно близкие результаты моделирования получаются при использовании комбинированной стратегии управления (кривые 1). Однако стабилизация заданного движения  $x_{зад} = -0,4$  при применении релейно-линейного закона происходит с постоянной статической ошибкой  $\Delta x_1 = 0,1$ , что не всегда приемлемо с точки зрения выдерживания точностных характеристик регулятора.

Организация скользящего режима работы квазиоптимального регулятора относительно поверхности переключения – вычисляемой функции Ляпунова  $V(t, x_0)$  – обеспечивается релейным законом управления. Использование релейного закона позволяет точно стабилизировать заданную выходную координату системы (13). Однако при этом заметно ухудшаются показатели качества переходных процессов и увеличиваются затраты на управление. Пример закончен.

## 4. Заключение

Таким образом, совместное использование процедур интервальной и локальной оптимизации позволяет существенно упростить алгоритмы управления. Вместо того чтобы для обеспечения ожидаемой квадратичной сходимости одновременно использовать характеристики первого и второго порядков (уравнения сопряженной системы и матричное нелинейное уравнение типа Риккати) предлагается применять только характеристики первого порядка. Точки стационарности характеристик уточняются путем квазилинеаризации на длинах  $\Delta t$ , а грубое начальное приближение локальной минимали определяется из процедуры по схеме дифференциального динамического программирования.

## Список литературы

1. Данеев А.В., Сизых В.Н. Методология проектирования алгоритмического обеспечения интегрированных систем управления авиационными транспортными средствами на основе уравнений нелинейной динамики. М.: Наука, 2021 295 с.
2. Сизых В.Н., Данеев А.В. Приближенно-оптимальный синтез систем оперативного управления динамическими объектами на основе квазилинеаризации и достаточных условий оптимальности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 6. С. 20-37.