

УДК 519.86

ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МОДЕЛИ БАНКА

А.А. Жукова

*Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской академии наук»*
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: aa.zhukova@phystech.edu

А.Ю. Флерова

*Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской академии наук»*
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 40
E-mail: a.flerova@mail.ru

Ключевые слова: оптимальное управление, модель банка, фазовые ограничения

Аннотация: Исследование математической модели управления активами и пассивами банка в условиях выполнения норматива достаточности капитала приводит к задаче оптимального управления с ограничениями на фазовую траекторию. В данной работе предложен подход к численному решению данной задачи и представлены результаты расчетов.

1. Введение

Многие национальные экономики столкнулись с трудностями в банковской сфере из-за банкротства крупных банков. Частыми причинами банкротства являются: неспособность финансовых учреждений удовлетворить требования внешнего регулирования или существенное снижение собственного капитала. Рассматривается задача оптимального планирования активов и пассивов системно значимого банка, чтобы избежать рискованных состояний, которые могут привести к банкротству. Математическая формализация задачи представлена в виде модели динамики состояния банка и управления активами и пассивами в условиях ограничений, налагаемых на показатели банка. Особенности представленной системы является, во-первых, управление процентной ставкой как движущей силой спроса на банковские депозиты и кредиты. Вторая существенная деталь – это три ограничения, считающиеся важными для анализа: рост капитала банка, ограничение

ликвидности и ограничение на соотношение собственного капитала и активов, взвешенных с учетом риска. Последние два являются фазовыми ограничениями, а первое может быть наложено на конечный результат периода планирования управления. Задача банка формулируется в виде задачи максимизации прибыли собственников банка, и является задачей оптимального управления с ограничениями на фазовую траекторию [1].

Задачи такого уровня с большим количеством параметров являются сложными [2], [3]. Для того чтобы выработать теоретические основания и подходы к численной реализации рассмотрим самую общую модель банка, деятельность которого сводится к выдаче одного совокупного вида кредитов и приема одного вида депозитов.

В докладе производится сопоставление расчетов оптимального управления, полученных прямым и непрямым методом, с результатами аналитического решения.

2. Модель управления активами и пассивами банка

Рассмотрим модель банка, управляющего уровнями кредитов $L(t)$ и депозитов $S(t)$ с помощью выбора процентных ставок $r_l(t)$ и $r_s(t)$ соответственно. Так же параметром управления является количество выплачиваемых собственникам дивидендов $Z(t)$. Принципы построения модели подробно описаны в работе [1].

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int_0^T Z(t)^{1-\rho} e^{-\delta t} dt \rightarrow \max \\
 (2) \quad & \frac{d}{dt} S(t) = S(t)(\gamma_s r_s(t) + \alpha_s - \beta_s), \\
 (3) \quad & \frac{d}{dt} L(t) = -L(t)(\gamma_l r_l(t) - \alpha_l + \beta_l), \\
 (4) \quad & \frac{d}{dt} W(t) = -C_0 - Z(t) + L(t)r_l(t) - S(t)r_s(t), \\
 (5) \quad & 0 \leq k_A(1 - w_l)L(t) + (1 - k_A)W(t) + k_A S(t)(n_s - 1), \\
 (6) \quad & 0 \leq S(t)(1 - n_s - \tau_s) + L(t)(1 - \tau_l) + W(t), \\
 (7) \quad & 0 \leq r_l(t) \leq R_l, \quad 0 \leq r_s(t) \leq R_s, \quad 0 \leq Z(t) \leq M, \\
 (8) \quad & \eta W(0) \leq W(T), \\
 (9) \quad & L(0) = L_0, \quad S(0) = S_0, \quad W(0) = W_0.
 \end{aligned}$$

Здесь $W(t)$ – собственный капитал банка, ρ , δ , α , β и прочие константы – некоторые параметры модели. Государство разрабатывает меры по ограничению чрезмерного риска и экономически опасной деятельности банков, особенно в том, что касается управления активами. Одним из таких показателей является коэффициент достаточности капитала. Этот коэффициент включает в себя веса активов, связанных с рисками. Соотношение собственного капитала банка к активам, взвешенным по риску, должно быть выше заданного коэффициента. Обозначим через w_l вес риска конкретных активов. Нижний порог коэффициента достаточности капитала обозначается k_A и определяется регулятором конкретной страны. Таким образом, неравенство (5) представляет собой ограничение достаточности капитала.

Следует отметить, что на оптимальной траектории терминальное ограничение, обусловленное требованием роста собственного капитала банка, $\eta W(0) \leq W(T)$ в

этой задаче можно заменить равенством $\eta W(0) = W(T)$, поскольку если к концу рассматриваемого периода горизонта планирования банка возникнет избыток собственных средств и $\eta W(0) > W(T)$, то руководство банка не оптимизирует благосостояние инвесторов, поскольку излишек может быть выплачен в виде дивидендов, которые увеличивают значение функционала.

3. Результаты расчетов

Мы представляем несколько практических подходов к численному анализу этой модели: на основе принципа максимума по аналогии с [2] и алгоритма, а адаптированного к данной задаче [4], а также прямого метода, в рамках которого задача сведена к задаче оптимизации. Результаты расчетов при каждом из подходов сравниваются с аналитическим решением. Демонстрируются некоторые особенности методов и приводятся возможные алгоритмические реализации.

На диаграммах (1)–(3) представлено сопоставление численного решения с помощью принципа максимума и аналитического решения. Расчеты прямым методом с высокой точностью воспроизводят аналитическое решение. Расчеты с помощью принципа максимума в рассмотренном примере качественно сходны, но имеют место существенные отклонения.

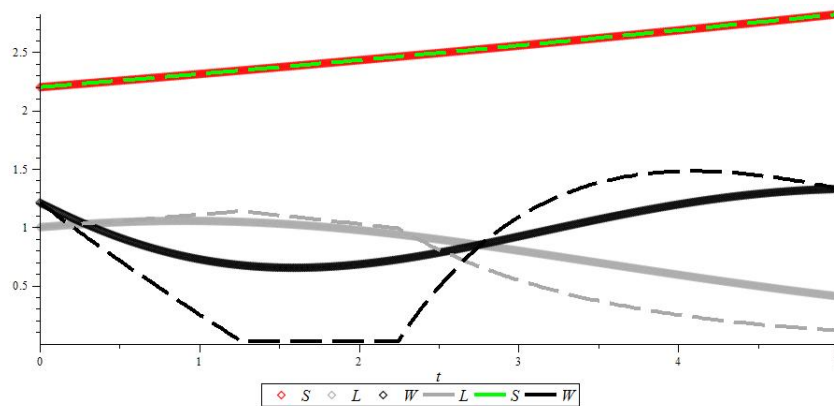


Рис. 1. Аналитически и численно полученные траектории состояния банка

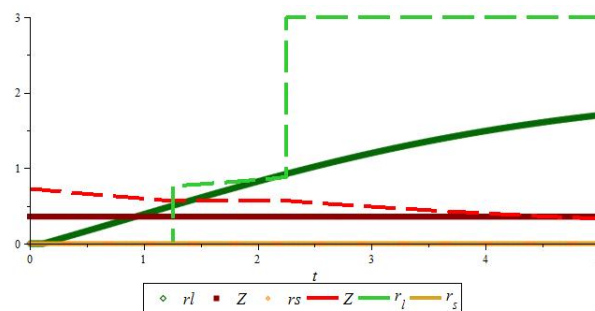


Рис. 2. Аналитически и численно полученные траектории управления активами и пассивами банка

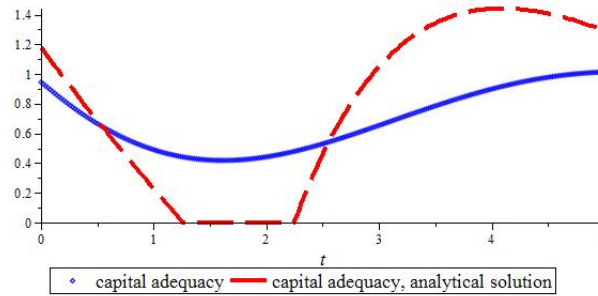


Рис. 3. Аналитически и численно полученные траектории выражения в фазовом ограничении

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-21-00494, <https://rscf.ru/project/24-21-00494>.

Список литературы

1. Flerova A., Zhukova A., Optimal Asset and Liability Management by a Bank under Internal and External Constraints // 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), IEEE. 2023. P. 1–5.
2. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Pereira F.L., An indirect method for regular state-constrained optimal control problems in flow fields. IEEE Transactions on Automatic Control. 202. Vol. 66, No. 2, P. 787–793.
3. Chertovskih R., Karamzin D., Khalil N.T., Pereira F.L., Regular path-constrained time-optimal control problems in three-dimensional flow fields. European J. of Control. 2020. Vol. 56, P. 98–106.
4. Chernov A., Flerova A., Zhukova A., Application of Optimization Methods in Solving the Problem of Optimal Control of Assets and Liabilities by a Bank. In International Conference on Optimization and Applications. Cham: Springer Nature Switzerland. 2023 P. 235–250.