

# МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ: ПРОВЕРКА СОГЛАСОВАННОСТИ ОЦЕНОК ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ПРИЗНАКОВ

**С.А. Баркалов**

*Воронежский государственный технический университет*  
Россия, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
sbarkalov@nm.ru

**С.И. Моисеев**

*Воронежский государственный технический университет*  
Россия, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
mail@moiseevs.ru

**Е.А. Серебрякова**

*Воронежский государственный технический университет*  
Россия, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
sea-parish@mail.ru

**Ключевые слова:** экспертное оценивание, метод анализа иерархий, матрица парных сравнений, согласованность.

**Аннотация:** В работе описана проблема, связанная с вычислительными сложностями проверки согласованности матриц парных сравнений при применении метода анализа иерархий в экспертном оценивании. Для ее решения был предложен альтернативный подход к оценке согласованности. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что полученные по предложенной методике оценки показателей согласованности адекватны.

## 1. Введение

Экспертное оценивание методом анализа иерархий [1] в настоящее время широко используется во многих сферах научной и практической деятельности для оценки признаков по качественным критериям.

Одной из основных проблем эффективного применения этого метода является необходимость согласованности экспертных оценок при проведении сравнения признаков и формировании матрицы парных сравнений, который заключается в соблюдении принципа транзитивности [2, 3].

Существует достаточно известный и обоснованный метод проверки согласованности матрицы парных сравнений [4], однако, как будет показано ниже, он эффективно работает для небольшого числа признаков, а при большом их количестве возникают проблемы вычислительного характера. Однако, в последнее время в эпоху Big Data, возникает необходимость осуществлять обработку матриц парных сравнений очень большой размерности.

В данной работе предлагается кардинально иной подход к проверке согласованности экспертных оценок при парных сравнениях, который может применяться при большом числе признаков.

## 2. Традиционный метод проверки согласованности

Метод анализа иерархий заключается в попарном сравнении признаков  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и формировании матрицы парных сравнений  $V$ , общий вид которой приведен в таблице 1.

Таблица 1. Матрица парных сравнений.

$A_i \setminus A_j$	$A_1$	$A_2$	...	$A_n$
$A_1$	1	$V_{12}$	...	$V_{1n}$
$A_2$	$V_{21}$	1	...	$V_{2n}$
...	...	...	...	...
$A_n$	$V_{n1}$	$V_{n1}$	...	1

Элементы матрицы  $V$  из таблицы 1 будут вычисляться следующим образом:

$$(1) \quad V_{ij} = \begin{cases} h, & \text{если } A_i \text{ лучше } A_j; \\ 1/h, & \text{если } A_i \text{ хуже } A_j, \end{cases}$$

где  $h$  – лингвистическая шкала отношений [2]. позволяет эксперту ставить в соответствие степеням предпочтения одного сравниваемого признака перед другим признакам, числовые значения, обычно по шкале от 1 до 9.

Традиционный метод проверки согласованности основан на вычислении индекса согласованности  $CI$  или отношение согласованности  $CR$ , которые вычисляются по формулам:

$$(2) \quad CI = \frac{\lambda_{\max} - 1}{n - 1}; \quad CR = \frac{CI}{M(CI)},$$

где  $M(CI)$  – математическое ожидание индекса согласованности для матрицы парных сравнений  $V$ , элементы которой получены случайным образом. Значения  $M(CI)$  для разных размеров матриц парных сравнений приведены в [4],  $\lambda_{\max}$  – максимальное или главное собственное значение матрицы парных сравнений.

В качестве основного показателя принято использовать отношение согласованности  $CR$ , причем данный коэффициент измеряется на отрезке от 0 до 1 и построен так, что чем меньше отношение согласованности, тем более согласованной является матрица  $V$ . Для оценочных расчетов можно считать, что надежные и несмещенные результаты экспертного оценивания будут в том случае, когда  $CR \leq 0,10$ . Если это условие не выполняется, то логика оценок для эксперта нарушена и необходимо пересмотреть результаты экспертного оценивания, чтобы улучшить согласованность.

Основная проблема для традиционного метода при больших матриц согласованности, является вычисление главного собственного значения матрицы парных сравнений  $\lambda_{\max}$ . Для квадратных матриц порядка 100 нахождение собственных значений даже численными методами трудоемко и требует много времени. Ввиду этого предлагается альтернативный и совершенно другой подход, который назовем *методом учета множественных взаимодействий* (МУМВ).

## 3. Альтернативный метод проверки согласованности

МУМВ основан на принципе сравнения степени предпочтения двух признаков в произвольной их паре и степени предпочтения каждого из этих признаков по отдельности по отношению к общей массе остальных признаков, исключаящих эти признаки [5].

Рассмотрим некоторые признаки  $A_i$  и  $A_j$ ,  $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, n, i \neq j$ . В основе МУМВ, лежит предположение о том, что у согласованных матриц степень предпочтения признака  $A_i$  перед признаком  $A_j$  должна быть пропорциональна отношению степени предпочтения признака  $A_i$  над совокупностью всех остальных признаков (за исключением  $A_j$ ) к степени предпочтения признака  $A_j$  над совокупностью всех остальных признаков (за исключением  $A_i$ ).

Введем матрицу  $W_{ij}$ , которая имеет смысл степень предпочтения признака  $A_i$  над множеством всех остальных признаков, кроме  $A_j$ . Иными словами, элементы данной матрицы для любого признака  $A_i$  это итоговая оценки (вес) произвольного признака (кроме  $A_j$ ) на множестве  $\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \setminus A_j$ .

При этом, чтобы не вычислять собственные вектора матрицы  $V$ , достаточно использовать приближенную формулу оценки весов, в соответствии с мультипликативным методом МАИ [6]:

$$W_{ij} = \sqrt[n-1]{\frac{\prod_{k=1}^n V_{ik}}{V_{ij}}}$$

Для полностью согласованных матриц, согласно предположению МУМВ, должно выполняться:

$$(3) \quad \frac{W_{ij}}{W_{ji}} \sim V_{ij},$$

если это условие не выполняется, то степень согласованности уменьшается в зависимости от того, насколько меньше корреляция между левой и правой частью (3).

На основании вышесказанного, если использовать параметрический коэффициент корреляции Пирсона [7], что оправдано при больших объемах данных, можно ввести коэффициент согласованности  $СК$ , который рассчитывается по формуле:

$$(4) \quad СК = \frac{n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{W_{ij}}{W_{ji}} V_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{W_{ij}}{W_{ji}} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij}}{\sqrt{\left( \left( n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{W_{ij}}{W_{ji}} \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{W_{ij}}{W_{ji}} \right)^2 \right) \left( n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (V_{ij})^2 - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} \right)^2 \right)}}$$

Коэффициент согласованности  $СК$ , вычисленный по формуле (3), основан на коэффициенте корреляции и будет измеряться в интервале от 0 до 1, причем чем он больше, тем более согласованной является матрица парных сравнений.

Ниже приведем анализ оценок согласованности матриц парных сравнений, полученных по МУМВ.

#### 4. Анализ результатов, полученных по МУМВ

Для анализа результатов приведенной альтернативной модели проверки согласованности матриц парных сравнений, были проведены вычислительные эксперименты, алгоритм выполнения которых состоял в следующем.

1. Генерировались серии матриц парных сравнений разной размерности (от 5 до 15) со шкалой предпочтений от 1 до 9.

2. В каждой серии содержалось по две группы из 20 матриц, в которых определялась разная согласованность оценок (комбинаторными методами путем перестановки парных оценок). В первой группе производилась перестановка оценок только по одному признаку, во второй группе случайно переставлялись оценки по всем признакам.

3. Для каждой матрицы вычислялось отношение согласованности (традиционный метод) и коэффициент согласованности (альтернативный признак).

4. Проводился статистический анализ полученных показателей согласованности для каждой серии и в каждой группе.

Все результаты вычислительных экспериментов здесь привести мы не можем ввиду их объемности, приведем для примера лишь корреляционные облака из серии вычислительных экспериментов для 8 признаков, они приведены на рис. 1.

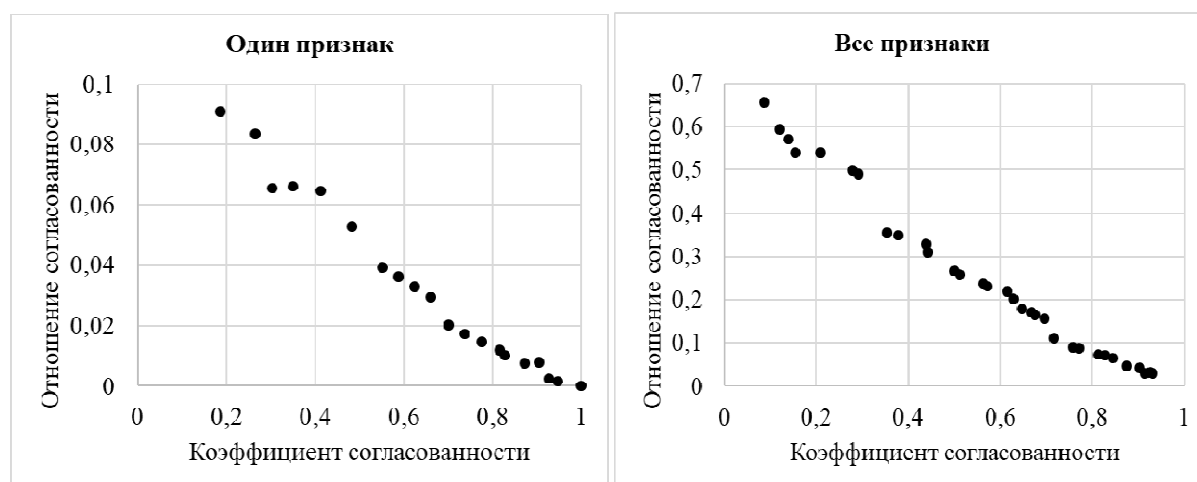


Рис. 1. Корреляционное облако при варьировании всеми признаками.

Как видно из рис. 1, как при варьировании одним признаком, так и для разных признаков, видна хорошая линейная корреляция между отношением согласованности и коэффициентом согласованности. Аналогичная картина наблюдалась и в других вычислительных экспериментах. Коэффициенты корреляции между показателями согласованности, полученными разными методами превышали 0,98 во всех экспериментах, причем чем больше было число признаков, тем выше был коэффициент корреляции. Остальные статистические показатели также были однородными.

Результаты статистических экспериментов показали, что оценка согласованности, полученная по МУМВ является адекватной и ее можно использовать на практике при работе с большим числом признаков.

## 5. Заключение

В работе была выявлена проблема, которая заключалась в вычислительной сложности расчета показателей согласованности матриц парных сравнений при использовании метода анализа иерархий в экспертном оценивании при обработке больших групп данных. Проблема состояла в необходимости вычисления собственных значений матриц парных сравнений, что при большом числе признаков и, соответственно, размерности матриц, является сложной в вычислительном плане, даже используя численные методы.

Для решения проблемы был предложен альтернативный подход к оценке согласованности, который был основан на корреляции степени соответствия результатов сравнения признаков в каждой паре с отношением весов каждого признака в группе признаков, исключая тот признак, с которым сравнивается исходный.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что оценка согласованности, полученная по альтернативной методике, является адекватной и ее можно использовать на практике при работе с большим числом признаков.

## Список литературы

1. Саати Т., Кернс К.М. Аналитическое планирование. Организация систем / Пер. с англ. М.: Радио и связь. 1991. 224 с.
2. Ананьев А.В., Иванников К.С., Моисеев С.И. Применение теории латентных переменных для анализа элементного базиса устройств обработки сигналов на основе метода парных сравнений // Системы управления и информационные технологии. 2022. № 3 (89). С. 35-38.
3. Баркалов С.А., Карпович М.А., Моисеев С.И. Метод анализа иерархий: подход, основанный на теории латентных переменных // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2022. Т. 22, № 2. С. 58-66.
4. Мельников А.В. Иванченко А.В. Расширение метода анализа иерархий для определения согласованности оценок экспертов // Системы управления и информационные технологии. 2012. № 1 (47). С. 75-78.
5. Мельников А.В., Моисеев С.И. Альтернативный метод проверки степени согласованности матрицы парных сравнений // Системы управления и информационные технологии. 2023. № 2 (92). С. 49-52.
6. Lootsma F.A. Scalesensitivity in the multiplicative AHP and SMART // J. Multi-Criteria Decision Analysis. 1993. Vol. 2, No. 2. P. 87-110.
7. Боровков А.А. Математическая статистика / 4-е издание. С.Пб.: Лань. 2010. 704 с.