УДК 021.8 + 025.1

ОПТИМАЛЬНОСТЬ СОГЛАСОВАННОГО МЕХАНИЗМА УПРАВЛЕНИЯ В ОРГАНИЗАЦИОННОЙ АКТИВНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМИРОВАННОСТИ ЦЕНТРА

А.К. Еналеев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: anverena@mail.ru

Ключевые слова: система Центр – агент, выполнение плана, неманипулируемость, процедура планирования, функция штрафов, условия согласования.

Аннотация: Рассмотрена задача построения правильного механизма управления в активной организационной системе, обеспечивающего сообщение агентом в Центр правдивых данных и выполнение установленного Центром плана. План назначается Центром на основе изначально выбранного механизма управления, включающего в свой состав процедуру планирования действия агента и функцию штрафов за отклонение действия агента от плана. Сформулирована и доказана теорема, определяющая условия согласования, которым удовлетворяет оптимальный правильный механизм.

1. Введение

В теории управления организационными активными системами [1, 2] одной из центральных задач является исследование правильных механизмов управления, т.е. механизмов, побуждающих агенты выбирать действия с устанавливаемыми Центром планами, а также сообщать в Центр данные о своих предпочтениях. Важной задачей является определение и обоснование условий, когда правильный механизм является оптимальным. Проблеме сообщения достоверных данных в задачах принятия решений, называемой также проблемой неманипулируемости, посвящено большое число работ. В числе одних из первых работ в этой области следует отметить [1, 3, 4]. В обзоре [5] дается расширенный анализ исследований проблемы неманипулируемости в работах зарубежных, советских и российских авторов. В [6] получены условия выполнения планов и доказана оптимальность правильных механизмов в условиях полной информированности Центра. В отличие от зарубежных работ по неманипулируемости принятия решений [3, 4] в теории управления организационными активными системами основное внимание уделено не только процессам сообщения данных, но и выбору агентом действий, которые, в общем случае, могут не совпадать с устанавливаемыми Центром решениями [1, 2, 7, 8]. Для решения задач управления такими процессами классические результаты [3, 4, 5] оказываются неприменимы. В [7] эти задачи исследованы для частной модели. В [8] получены условия правильности процедур планирования при неполной информированности Центра и доказана оптимальность правильной процедуры планирования (принятия Центром решения). Формулировки соответствующих теорем приведены в разделе 3 настоящей статьи. В [8] осталась не исследованной задача оптимальности механизма управления в целом, включающего совместно с процедурой планирования функцию штрафа за отклонение действия агента от установленного ему плана. В настоящей статье сформулирована и доказана Теорема, дающая решение этой задачи.

2. Модель и постановка задачи

Рассмотрим активную организационную систему, состоящую из *агента* и *Центра*. Обозначим $f(x,y,r) = h(y,r) - \chi(x,y)$ целевую функцию агента, где y – действие агента, x – план, устанавливаемый Центром для агента, как желательное для Центра значение действия агента, r – параметр, характеризующий тип агента, $h(y,r)$ – функция дохода агента, $\chi(x,y)$ – функция штрафа за отклонение действия агента от плана. Пусть $y \in Y$, $x \in Y, r \in A$, $\chi(x,y) \geq 0, \chi(y,y) = 0$, множества Y и A компактны. Предполагается, $h(y,r)$ и $\chi(x,y)$ таковы, что определены максимум целевой функции агента по y и r.

Целевую функцию Центра обозначим$F(x,y,r)$. Предположим, что определен максимум функции $F(x,y,r)$)на ее области определения по каждому из аргументов.

Пусть в системе имеется несимметричная информированность о параметре r, а именно, агент знает значение своего типа r, а Центру известно только множество A принадлежности типа агента, $r \in A$. В условиях такой неполной информированности Центра, рассмотрим следующую схему функционирования системы.

Первый ход делает Центр. Он выбирает механизм управления $\mu = \{\pi(\cdot), \chi(\cdot,\cdot)\}$, включающий процедуру планирования $\pi(\cdot)$, где $\pi(\cdot): A \to Y$, и функцию штрафов $\chi(x,y)$из некоторого заданного множества допустимых функций Ω. Далее состав и свойства множества Ω будут определены.

Второй ход, состоящий из двух шагов, делает агент. На первом шаге агент сообщает Центру данные s о значении своего параметра r. В соответствии с установленным Центром механизмом планирования, агенту назначается план $x = \pi(s)$. После этого агент делает второй шаг, который заключается в выборе его действия y.

Рассмотрим правила, которым следуют Центр и агент, совершая свои ходы. Пусть агенту установлен план $x = \pi(s)$. Примем, что агент при выборе своего действия $y^* = y^*(x,r) = y^*(\pi(s),r)$ стремится максимизировать свою целевую функцию $f(x,y,r)$:

(1) $$y^* \in R(x,r) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} f(x,y,r),$$

где $y^* = y^*(x,r) = y^*(\pi(s),r)$– выбор действия агентом в зависимости от назначенного плана. Обозначим $\phi(x,r) = f(x,y^*,r)$.

Выполнение планов агентами при выборе действий определяется условием

(2) $$f(x,x,r) = \max_{y \in Y} f(x,y,r).$$

На первом шаге своего хода агенты выбирают сообщения, стремясь максимизировать свою функцию предпочтения $\phi(\pi(s),r)$ по s:

(3) $$\phi(\pi(s^*),r) = \max_{s \in A} \phi(\pi(s),r).$$

Сообщение достоверных данных выглядит следующим образом:

(4) $$\phi(\pi(r),r) = \max_{s \in A} \phi(\pi(s),r).$$

Будем называть механизм управления правильным, если $s^* = r$ и $y^* = x$.

Эффективность механизма $\mu = \{\pi(\cdot), \chi(\cdot,\cdot)\}$ будем оценивать значением целевой функции Центра $Q_\mu(r) = F(\pi(s^*), y^*, r)$при выборе агентом стратегий s^*, y^*.

Примем, что целевая функция Центра обладает следующим свойством:

(5) $$F(x,y,r) \leq F(y,y,r).$$

Выражение (5) означает, что Центр несет потери от невыполнения плана [1].

Пусть задан механизм управления $\mu = \{\pi(\cdot), \chi(\cdot,\cdot)\}$, для которого определены s^*и y^*. Проблема заключается в следующем. Существует ли правильный механизм $\mu^{п} = \{\pi^{п}(\cdot), \chi^{п}(\cdot,\cdot)\}$такой, что

(6) $$Q_{\mu}(r) = Q_{\mu^{п}}(r) = F(\pi^{п}(r), \pi^{п}(r), r) = F(x, x, r),$$

т.е. существует ли правильный механизм, эффективность которого не ниже эффективности заданного?

3. Согласованность механизма управления, обзор основных исходных теорем

Пусть справедливо свойство *благожелательности агента при выборе действия*, которое равнозначно требованию: «Если $x \in R(x,r)$, то $R(x,r) = \{x\}$». Иначе говоря, если выполнение плана не уменьшает выигрыш агента по сравнению с другим выгодным для него действием, т.е. если $f(x, y^*, r) = f(x, x, r)$, то он предпочтет выполнить план.

При благожелательности агента условием выполнения плана x агентом является $x \in P_{\chi}(r) = \{u|\ f(u,u,r) \geq f(u,y,r), u \in Y, y \in Y\} = \{u|\ h(u,r) \geq h(y,r) - \chi(u,y), u \in Y, y \in Y\}$,где $P_{\chi}(r)$ по определению является множеством выполнимых планов для $\chi(\cdot,\cdot)$.

Вообще говоря, $P_{\chi}(r) \subseteq Y_{\chi}^*(r) = \cup_{x \in Y} R_{\chi}(x,r)$, где $R_{\chi}(x,r)$определяется формулой (1) для заданной функции штрафа$\chi(\cdot,\cdot)$. Интересен случай

(7) $$P_{\chi}(r) = Y_{\chi}^*(r).$$

Он означает, что для любого выбираемого агентом действия y^*Центр может назначить план $x = y^*$и при этом, в силу$\chi(y^*, y^*) = 0$и (5), выигрыши агента $h(y^*, r)$ и Центра $F(y^*, y^*, r)$не уменьшатся. В этом смысле планы из множества $P_{\chi}(r)$являются согласованными, и (7) определяет «максимально согласованный механизм» [6,7].

Теорема 1 [6]. Если функция штрафов удовлетворяет «неравенству треугольника»:

(8) $$\chi(x,y) \leq \chi(x,u) + \chi(u,y) \text{ для всех } x, y, u \in Y,$$

то справедливо (7).

Условие (7) вместе с теоремой 1 определяют требования к механизму, обеспечивающему выполнение планов.

Аналогично свойству *благожелательности агента при выборе действий* примем гипотезу о *благожелательности агента при сообщении данных*: «Если $\exists\ s \in A, s \neq r$, такое что $\phi(\pi(s), r) = \phi(\pi(r), r)$, то агент выберет сообщение $s^* = r$. При справедливости обеих гипотез о благожелательности будем говорить, что *агент благожелателен*.

Теорема 2 [8]. Если для благожелательного агента выполняется (8), тогда необходимым и достаточным условием правильности механизма $\mu = \{\pi(\cdot), \chi(\cdot,\cdot)\}$является выполнение условия совершенного согласования вида

(9) $$\phi(\pi(s), s) = \max_{x \in X_{\chi}^{c} \cap P_{\chi}(s)} \phi(x, s),$$

где X_{χ}^{c}– компактное множество, устанавливаемое Центром при заданной функции штрафа $\chi(\cdot,\cdot)$, такое что $\forall s \in A:\ X_{\chi}^{c} \cap P_{\chi}(s) \neq \emptyset$.

Теорема 2 определяет множество правильных процедур планирования, или согласованных механизмов, удовлетворяющих условиям «максимального» (7) и «совершенного» (9) согласования.

Теорема 3 [8].Пусть для заданной функции штрафов справедливо (8), тогда для любого допустимого механизма планирования $\pi(\cdot): A \to Y$ существует правильная процедура планирования $\pi^{п}(\cdot)$ не меньшей эффективности (6): $Q_{\pi}(r) = F(\pi(s^*), y^*, r) \leq$

$Q_{\pi^{\text{п}}}(r) = F(\pi^{\text{п}}(r), \pi^{\text{п}}(r), r) = F(x, x, r)$, где $s_\pi^*, y_\pi^* = y_\pi^*(s_\pi^*)$, сообщение и действие агента при процедуре планирования $\pi(\cdot)$.

Из Теоремы 3 следует, что оптимальная процедура планирования содержится в множестве правильных процедур планирования.

4. Оптимальный согласованный механизм управления

Пусть задана некоторая функция штрафа$\chi(x, y)$. Для заданной функции штрафа $\chi(x, y)$ определим показатель ее максимального роста (ПМР)[**] как$\omega_\chi(y, u) = \max_{x\in X}[\chi(x, u) - \chi(x, y)]$. Заметим, что ПМР удовлетворяет свойствам функции штрафа и неравенству (8). Функция $\omega_\chi(y, u)$ удовлетворяет «неравенству треугольника» [7].

Пусть задана функция $\omega(x, y)$, удовлетворяющая «неравенству треугольника» $\omega(x, y)$. Примем ее в качестве ПМР. При заданном ПМР определим множество допустимых функций штрафа: $\Omega = \Omega_\omega = \{\chi(x, y) |\ \chi(u, y) - \chi(u, x) \le \omega(x, y), \forall u, x, y \in Y\}$.

В соответствии с Теоремой 3 обозначим $\pi_\chi^*(\cdot)$ оптимальную правильную процедуру планирования, удовлетворяющую условиям максимального и совершенного согласования (9).

Теорема 4. Существует оптимальный правильный механизм управления $\mu^* = \{\pi_\omega^*(\cdot), \omega(\cdot,\cdot)\}$, удовлетворяющий максимальному (7) и совершенному (9) условиям согласования.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим произвольный допустимый механизм $\mu = \{\pi(\cdot), \chi(\cdot,\cdot)\}$, в котором функция штрафов $\chi(x, y) \in \Omega_\omega$. Построим для $\chi(x, y)$ее ПМР $\omega_\chi(x, y)$. Т.к. $\chi(x, y) \in \Omega_\omega$, то $\omega_\chi(x, y) \in \Omega_\omega$.

Пусть агент при механизме управления $\mu = \{\pi(\cdot), \chi(\cdot,\cdot)\}$выбирает сообщение $s^* = s_\mu^*(r)$ и действие $y_\mu^* = y_\mu^*(\pi(s_\mu^*(r)), r)$. Этот выбор определяет выигрыш агента $\phi(\pi(s^*), r) = h(y_\mu^*, r) - \chi(\pi(s^*), y_\mu^*)$.

Для механизма μ построим соответствующий ему механизм управления $\tilde{\mu} = \{\tilde{\pi}(\cdot), \omega_\chi(\cdot,\cdot)\}$. Примем $\tilde{\pi}(s) = y_\mu^* = y_\mu^*(\pi(s_\mu^*(s)), s)$. Заметим [7], что $\forall r \in A :$ $P_\chi(r) \subseteq Y_\chi^*(r) \subseteq P_{\omega_\chi}(r) = Y_{\omega_\chi}^*(r)$, следовательно $y_\mu^* = y_\mu^*(\pi(s_\mu^*(r)), r) \in P_{\omega_\chi}(r)$, и если $x = \tilde{\pi}(s) \in P_{\omega_\chi}(r)$, то $y_{\tilde{\mu}}^* = \tilde{\pi}(s)$, где $\phi(\tilde{\pi}(s), r) = h(y_{\tilde{\mu}}^*, r) - \chi(\tilde{\pi}(s), y_{\tilde{\mu}}^*) = h(y_{\tilde{\mu}}^*, r) - \chi(y_{\tilde{\mu}}^*, y_{\tilde{\mu}}^*) = h(y_{\tilde{\mu}}^*, r) = h(\tilde{\pi}(s), r)$. Имеем $\phi(\pi(s^*), r) \le \phi(\tilde{\pi}(s), r)$. Рассмотрим множество $X_{\omega_\chi}^{\text{c}} = \cup_{s\in A}\{\tilde{\pi}(s)\} = \cup_{s\in A}\{y_\mu^*(\pi(s_\mu^*(s)), s)\}$ и правильный механизм $\mu_{\omega_\chi} = \{\pi_{\omega_\chi}(\cdot), \omega_\chi(\cdot,\cdot)\}$, удовлетворяющий условию совершенного согласования

$$\phi(\pi_{\omega_\chi}(s), s) = \max_{x\in X_{\omega_\chi}^{\text{c}} \cap P_{\omega_\chi}(s)} \phi(x, s).$$

По построению множества $X_{\omega_\chi}^{\text{c}}$и из Теоремы 2 следует $\pi_{\omega_\chi}(s) = \tilde{\pi}(s)$ и правильность механизма $\tilde{\mu} = \{\tilde{\pi}(\cdot), \omega_\chi(\cdot,\cdot)\}$. Заметим, что отсюда и из (5) следует $Q_{\tilde{\mu}}(r) \ge Q_\mu(r)$. В силу выбора произвольного $\mu = \{\pi(\cdot), \chi(\cdot,\cdot)\}$, где $\chi(\cdot,\cdot) \in \Omega_\omega$, следует справедливость Теоремы 4.

Список литературы

1. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. 255 с.
2. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами / 2-е изд. М.: Физматлит. 2007. 584 с.
3. Dasgupta P., Hammond P., Maskin E. The implementation of social choice rules: Some general results on incentive compatibility // The Review of Economic Studies. 1979. Vol. 46, No. 2. P. 185-216.

4. Myerson R. Incentive-compatibility and the bargaining problem // Econometrica. 1979. Vol. 47. P. 61-73.
5. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Коргин Н.А. Согласованность и неманипулируемость механизмов организационного управления: текущее состояние проблемы, ретроспектива, перспективы развития теоретических исследований // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 5-37.
6. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В. Двухуровневые активные системы. Цена децентрализации механизмов функционирования // Автоматика и телемеханика. 1980. № 6. С. 110-117.
7. Еналеев А.К. Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах // Управление большими системами. 2011. Вып. 33. С. 143-166.
8. Еналеев А.К. Правильные механизмы планирования в активных организационных системах с обменом информацией // Труды шестнадцатой международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD'2023. Москва, 26-28 сентября 2023. М.: ИПУ РАН, 2023. С. 1655-1662.