УДК 519.67, 517.977.5

ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.С. Антипин
ФИЦ ИУ РАН
Россия, 119333, Москва, Вавилова ул., 40
E-mail: asantip@yandex.ru

Е.В. Хорошилова
МГУ имени М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1-52, МГУ ВМК
E-mail: khorelenay@yandex.ru

Ключевые слова: терминальное управление, фазовые ограничения, краевые задачи, выпуклое программирование, функция Лагранжа, методы решения, сходимость.

Аннотация: Рассматривается задача терминального управления с линейной управляемой динамикой на фиксированном отрезке времени. На правом конце отрезка формулируется краевая задача в форме задачи выпуклого программирования. Решение этой задачи неявно определяет терминальное условие для управляемой динамики. Предлагается седловой подход для решения задачи терминального управления. Подход сводится к вычислению седловой точки функции Лагранжа при наличии фазовых ограничений на траекторию. В основе подхода лежат седловые достаточные условия по обеим группам переменных: прямых и двойственных. Формулируется метод вычисления седловой точки функции Лагранжа. Доказывается его монотонная сходимость по части переменных, при этом – слабая сходимость по управлениям, сильная сходимость по норме гильбертова пространства для фазовых и сопряженных траекторий, и терминальным переменным краевой задачи.

1. Введение

Работа продолжает исследования седловых методов решения задач терминального управления с краевой задачей на правом конце временного интервала [1–7, 9]. На фиксированном отрезке времени рассматривается линейная динамическая управляемая система

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^{\mathrm{T}}$ – вектор траекторий (фазовых переменных), матрицы $D(t), B(t)$ размерностей $n \times n$, $n \times r$ $(r < n)$ соответственно, непрерывны. Управления $u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))^{\mathrm{T}} \in \mathrm{U}$ ограничены по норме гильбертова пространства.

Для всевозможных управлений из U и заданного $x(t_0)$ система дифференциальных уравнений порождает траектории $x(t)$, правые концы которых $x(t_1)$ описывают терминальное множество достижимости $X_1 \subset \mathbb{R}^n$.

В [8, Кн. 1, с. 443] показано, что любому управлению $u(\cdot) \in \mathrm{U}$ в указанной выше линейной дифференциальной системе отвечает единственная траектория $x(\cdot)$, и эта пара удовлетворяет тождеству

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} (D(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau))d\tau, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. При этом траектория $x(t)$ является абсолютно непрерывной функцией [10].

Пусть правый конец $x_1 = x(t_1)$ траектории $x(t)$ удовлетворяет системе ограничений $G_1 x_1 \leqslant g_1$, задающей непустой выпуклый многогранник (G_1 – фиксированная $m \times n$-матрица, $m > n$, g_1 – известный вектор), $\varphi_1(x_1)$ – выпуклая скалярная функция. Сформулируем следующую задачу терминального управления с фазовыми ограничениями на всем отрезке времени: найти управление $u^*(\cdot) \in \mathrm{U}$ и отвечающую ему траекторию $x^*(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1]$, соединяющую начальное значение x_0 с решением $x_1^* = x^*(t_1)$ конечномерной задачи выпуклого программирования. При этом в произвольный момент времени $t \in [t_0, t_1]$ траектория удовлетворяет фазовым ограничениям $G(t)x(t) \leqslant g(t)$. Таким образом, имеем задачу:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1^*, \\ G(t)x(t) \leqslant g(t),\ \ x(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1],\ u(\cdot) \in \mathrm{U}, \\ (x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \mathrm{Argmin}\{\varphi_1(x_1) \mid G_1 x_1 \leqslant g_1,\ x_1 \in X_1 \subset \mathbb{R}^n\}, \end{cases}$$

где $G(t)$ есть $m \times n$–непрерывная матрица.

В выпуклом случае целевую функцию $\varphi_1(x_1)$ можно заменить в точке минимума ее линейным приближением. В результате такой линеаризации исходная задача сводится к нахождению неподвижной точки экстремального отображения:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1^*, \\ G(t)x(t) \leqslant g(t),\ x(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1],\ u(\cdot) \in \mathrm{U}, \\ (x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \mathrm{Argmin}\{\langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1 - x_1^* \rangle \mid\ G_1 x_1 \leqslant g_1,\ x_1 \in X_1 \subset \mathbb{R}^n\}. \end{cases}$$

Задачу (2) можно интепретировать как задачу линейного программирования в функциональном пространстве. Как показано в [8, Кн. 2, с. 644], решение задачи $(x_1^*, x^*(t), u^*(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$ существует. Условия регулярности типа Слейтера выполняются.

2. Классический лагранжиан и прямая задача

Рассмотренная задача представляет собой задачу терминального управления с фазовыми ограничениями по всей длине траектории, сформулированную в гильбертовом пространстве. В теории линейного программирования в конечномерном пространстве известно, что наряду с прямой задачей всегда существует двойственная к ней задача в сопряженном пространстве. Проводя соответствующие аналогии для функциональных пространств, получим в явном виде двойственную задачу для задачи (2). С этой целью введем линеаризованную функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x_1, x(\cdot), u(\cdot); p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) = \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1 - x_1^* \rangle + \langle p_1, G_1 x_1 - g_1 \rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), G(t)x(t) - g(t) \rangle dt, \tag{3}$$

определенную при всех $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$, $(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi^n_+[t_0, t_1]$. Здесь $x_1 = x(t_1)$; $\Psi^n[t_0, t_1]$, $\Psi^n_+[t_0, t_1]$ – линейные многообразия, соответственно, абсолютно непрерывных и неотрицательных абсолютно непрерывных функций из пространства, сопряженного к декартовому произведению пространств прямых переменных.

В регулярном случае существует седловая точка $(x_1^*, x^*(t), u^*(t); p_1^*, \psi^*(t), \eta^*(t))$ функции Лагранжа. Эта точка порождает прямое $(x_1^*, x^*(t), u^*(t))$ и двойственное $(p_1^*, \psi^*(t), \eta^*(t))$ решения, первое из которых образует решение задачи (2).

3. Двойственные лагранжиан и задача

Функция Лагранжа в динамических задачах позволяет перейти от исходной задачи в пространстве прямых переменных к двойственной задаче в сопряженном пространстве. Используя формулы перехода к сопряженным линейным операторам и формулу интегрирования по частям на отрезке $[t_0, t_1]$, выписывается сопряженная по отношению к (3) функция Лагранжа:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{T}}(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot); x_1, x(\cdot), u(\cdot)) = \langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + G_1^{\mathrm{T}} p_1 - \psi_1, x_1 \rangle + \langle -p_1, g_1 \rangle$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle D^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t) + G^{\mathrm{T}}(t)\eta(t), x(t) \rangle dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t), u(t) \rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \langle \eta(t), g(t) \rangle dt \tag{4}$$

для любых $(p_1, \psi(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi^n_+[t_0, t_1]$, $(x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1]$ $\times \mathrm{U}$, где $\psi_1 = \psi(t_1)$. Прямой и двойственный лагранжианы (3) и (4), будучи разными формами одной и той же функции, имеют одни и те же седловые точки $(x_1^*, x^*(t), u^*(t); p_1^*, \psi^*(t), \eta^*(t))$.

4. Необходимое и достаточное условие оптимальности седлового типа

Объединяя в одной системе основные элементы прямой и двойственной задач, приходим к седловой дифференциальной системе, играющей по отношению к исходной задаче (2) роль необходимого и достаточного условия оптимальности

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \;\; x^*(t_0) = x_0,\\
&\langle G_1 x_1^* - g_1, p_1 - p_1^*\rangle \leqslant 0, \quad p_1 \geqslant 0,\\
&\int_{t_0}^{t_1} \langle G(t)x^*(t) - g(t), \eta(t) - \eta^*(t)\rangle dt \leqslant 0, \quad \eta(t) \geqslant 0, \; t \in [t_0, t_1],\\
&\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t) + G^{\mathrm{T}}(t)\eta^*(t) = 0, \;\; \psi_1^* = \nabla\varphi_1(x_1^*) + G_1^{\mathrm{T}} p_1^*,\\
&\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t)\rangle dt \leqslant 0, \;\; u(\cdot) \in \mathrm{U}.
\end{aligned}$$

5. Седловой метод экстраградиентного типа

На основе седловой дифференциальной системы был построен итерационный процесс (параметр $\alpha > 0$ характеризует величину шага итерации). Экстраградиентный метод представляет собой управляемый процесс простой итерации, каждая итерация которого распадается на два полушага:

1) прогнозный полушаг

$$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \;\; x^k(t_0) = x_0, \tag{5}$$

$$\bar{p}_1^k = \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 x_1^k - g_1)), \tag{6}$$

$$\bar{\eta}^k(t) = \pi_+(\eta^k(t) + \alpha(G(t)x^k(t) - g(t))), \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^k(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t) + G^{\mathrm{T}}(t)\eta^k(t) = 0, \;\; \psi_1^k = \nabla\varphi_1(x_1^k) + G_1^{\mathrm{T}} p_1^k, \tag{8}$$

$$\bar{u}^k(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t)); \tag{9}$$

2) основной полушаг

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^k(t) = D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t), \;\; \bar{x}^k(t_0) = x_0, \tag{10}$$

$$p_1^{k+1} = \pi_+(p_1^k + \alpha(G_1 \bar{x}_1^k - g_1)), \tag{11}$$

$$\eta^{k+1}(t) = \pi_+(\eta^k(t) + \alpha(G(t)\bar{x}^k(t) - g(t))), \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\psi}^k(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t) + G^{\mathrm{T}}(t)\bar{\eta}^k(t) = 0, \;\; \bar{\psi}_1^k = \nabla\varphi_1(\bar{x}_1^k) + G_1^{\mathrm{T}} \bar{p}_1^k, \tag{13}$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t)), \quad k = 0, 1, 2... \tag{14}$$

6. Доказательство сходимости метода

Доказано, что процесс (5)–(14) сходится слабо по управлениям и сильно по прямым и двойственным переменным к одному из решений исходной задачи.

Теорема 1. *Если множество решений* $(x_1^*, x^*(t), u^*(t); p_1^*, \psi^*(t), \eta^*(t))$ *седловой дифференциальной системы не пусто и принадлежит декартову произведению* $\mathbb{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U} \times \mathbb{R}^m_+ \times \Psi^n[t_0, t_1] \times \Psi^n_+[t_0, t_1]$, *функция* $\varphi_1(x_1)$ *дифференцируема с градиентом, удовлетворяющим условию Липшица, то последовательность* $\{(x_1^k, x^k(t), u^k(t); p_1^k, \psi^k(t), \eta^k(t))\}$, *порожденная методом* (5)-(14) *с длиной шага* α, *выбранной из условия* $0 < \alpha < \min\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma_3}}\right)$, *где* γ_i *– некоторые вычисляемые константы, содержит подпоследовательность* $\{(x_1^{k_i}, x^{k_i}(t), u^{k_i}(t); p_1^{k_i}, \psi^{k_i}(t), \eta^{k_i}(t))\}$, *которая сходится к решению задачи, в том числе: слабо – по управлениям, сильно – по траекториям, сопряженным траекториям, а также терминальным переменным. В частности, последовательность*

$$\left\{|p_1^k - p_1^*|^2 + \|u^k(t) - u^*(t)\|^2 + \|\eta^k(t) - \eta^*(t)\|^2\right\}$$

монотонно убывает на декартовом произведении $\mathbb{R}^m_+ \times \mathrm{L}^r_2[t_0, t_1] \times \Psi^n_+[t_0, t_1]$.

7. Заключение

Предложен подход к решению задач оптимального управления на основе достаточных условий оптимальности. Доказана сходимость к решению задачи.

Список литературы

1. Антипин А.С. Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа // Экономика и мат. методы. 1977. Т. 13, Вып. 3. С. 560–565.
2. Антипин А.С. Метод модифицированной функции Лагранжа для задач оптимального управления со свободным правым концом // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2011. Т. 4, № 2. С. 27–44.
3. Антипин А.С., Хорошилова Е.В. Линейное программирование и динамика // Тpels Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2013. Т. 19, № 2. С. 7–25.
4. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Controlled dynamic model with boundary-value problem of minimizing a sensitivity function // Optim. Lett. 2019. Vol. 13, No. 3. P. 451–473.
5. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Optimal Control of Two Linear Programming Problems. XII International Conference Optimization and Applications (XII OPTIMA-2021) // In: Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jacimovic M., Khachay M., Malkova V. (eds) Optimization and Applications. LNCS, Springer. 2021. Vol. 13078. P. 151–164.
6. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. A proven method for optimal control problems with linear dynamics and phase constraints // In: Dynamical systems: stability, control, optimization: Proceedings of the International scientific conference in memory of Professor R.F. Gabasov. Minsk, October 5–10, 2021. P. 56–58.
7. Antipin A.S., Khoroshilova E.V. Terminal Control of Multi-Agent System. // Lecture Notes in Computer Science, 2022. Vol. 13781. P. 5–16.
8. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: в 2 кн. Кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
9. Васильев Ф.П., Хорошилова Е.В., Антипин А.С. Регуляризованный экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 27–37.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. 552 с.