УДК 519.977

МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ СОХРАНЕНИЯ ВИДОВОЙ СТРУКТУРЫ БИОСООБЩЕСТВА

А.Н. Кириллов
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
Россия, 185910, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
E-mail: kirillov@krc.karelia.ru

А.С. Иванова
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН
Россия, 185910, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
E-mail: a_s_ivanova@bk.ru

Ключевые слова: пищевая привлекательность участка, система обыкновенных дифференциальных уравнений, допустимое управление.

Аннотация: Рассматривается модель, описывающая взаимодействие хищников и жертв на некотором участке, начиная с момента времени появления популяции хищников на участке. Предполагается, что при недостаточном количестве питательного ресурса (жертв) на участке популяция хищников может мигрировать с участка в поиске наиболее привлекательного. Для описания пищевой привлекательности участка для популяции хищников используется функция, характеризующая накопление нехватки или избытка пищевого ресурса на участке. Исследуемая модель представляет собой систему трех дифференциальных уравнений, два из которых относительно численностей хищников и жертв, одно – относительно пищевой привлекательности участка. Решается задача сохранения видовой структуры биосообщества участка за счет изъятия особей популяции хищников. Построен процесс управления, являющийся решением поставленной задачи.

1. Модель и постановка задачи.

Рассматривается участок, содержащий популяцию жертв. Пусть при $t = 0$ (t – время) на участке появляется популяция хищников, имеющая численную характеристику $y(0)$. Появление хищников может быть естественным, как результат миграции в поисках ресурса питания, или искусственным – как результат его интродукции для борьбы с инвазивной популяцией жертв. Последнее является одним из методов борьбы с инвазивными видами [1]. Пусть $x(t), y(t)$ – численные характеристики популяций жертв и хищников в момент времени $t \geqslant 0$. Далее для $x(0), y(0)$ будем использовать обозначения x_0, y_0 соответственно. Будем считать, что хищники появляются на участке при выполнении условия $x_0/y_0 > \lambda$, где

$0 < \lambda$ – заданная пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое организму хищника в единицу времени для поддержания всех жизненных функций, то есть участок благоприятен для хищников в смысле объема пищевого ресурса, приходящегося на одного хищника. Пусть при $t \geqslant 0$ взаимодействие «хищник-жертва» задается системой Лотки-Вольтерра

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - by), \\ \dot{y} &= y(kbx - m - u), \end{aligned} \tag{1}$$

где a – коэффициент прироста жертв в отсутствии хищников, bx – количество жертв, потребляемых одним хищником в единицу времени, k – доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство, m – коэффициент смертности хищников в отсутствии жертв, u – интенсивность изъятия хищников с участка, причем, a, b, k, m считаются положительными постоянными ($k < 1$), $u \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Учитывая поведение траекторий системы Лотки-Вольтерра, можно заметить, что существует множество точек $M_0 = (x_0, y_0) \in \{x > \lambda y\}$ таких, что положительные полутраектории с начальными точками M_0 переходят в область $\{x < \lambda y\}$, что вызывает тенденцию к миграции хищников с участка, вследствие недостатка пищи (что показывают наблюдения). Очевидно, миграция хищников с участка не начинается мгновенно, то есть в такой момент времени $t^* > 0$, что $\frac{x(t^*)}{y(t^*)} = \lambda$, при условии $\frac{x(t)}{y(t)} > \lambda, t \in [0, t^*)$. В течение некоторого времени, когда $\frac{x(t)}{y(t)} < \lambda$, хищники будут оставаться на участке. Для моделирования инерционности начала миграции с участка в [2] одним из авторов настоящей статьи предложено понятие пищевой привлекательности участка, а именно, величины $n(t)$, задаваемой выражением вида

$$n(t) = \int_0^t \left(x(\tau, M_0, u) - \lambda y(\tau, M_0, u)\right) d\tau, \tag{2}$$

где $(x(\tau, M_0, u), y(\tau, M_0, u))$ – решение системы Лотки-Вольтерра при $\frac{x_0}{y_0} > \lambda$, соответствующее управлению u, причем $(x(0, M_0, u), y(0, M_0, u) = M_0 = (x_0, y_0)$. Из (2) следует, что в начальный момент времени $t = 0$ $n(0) = 0$. Величина $n(t)$ характеризует накопление нехватки или избытка пищи для хищников на промежутке $[0, t]$.

Будем полагать, что миграция хищников с участка начинается в момент времени $t = t^* > 0$, в который $\frac{x(t^*)}{y(t^*)} < \lambda$ и $n(t^*) = 0$, при условии $n(t) > 0$, $t \in (0, t^*)$.

В работе решается задача предотвращения миграции хищников с участка при помощи изъятия хищников с интенсивностью u. Таким образом, цель изъятия хищников в интенсивностью u – сохранение условия $n(t) > 0$, $t > 0$. Продифференцировав (2) по t и учитывая (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, задающую взаимодействие «хищник-жертва» с учетом пищевой привлекательности участка

$$\dot{x} = x(a - by), \qquad \dot{y} = y(kbx - m - u), \qquad \dot{n} = x - \lambda y \tag{3}$$

при $n(t) \geqslant 0$. Пусть $r(t, M_0, u) = (x(t, M_0, u), y(t, M_0, u), n(t, M_0, u))$ – решение системы (3), соответствующее управлению u, причем $r(0, M_0, u) = M_0 = (x_0, y_0, 0)$, $r(M_0, u) = \{r(t, M_0, u), t \in \mathbb{R}\}$ – соответствующая траектория. Пусть $\sigma(M_0, u)$ –

траектория системы (1), проходящая через точку M_0 и являющаяся выпуклым овалом. Поскольку правые части первых двух уравнений системы (3) не содержат переменную n, то траектории $r(M_0, u)$ системы (3) принадлежат цилиндрическим поверхностям $S(\sigma(M_0, u))$ с направляющей $\sigma(M_0, u)$ и образующими, ортогональными плоскости $n = 0$. Таким образом, фазовое пространство системы (3) представляет собой дизъюнктное объединение инвариантных цилиндрических поверхностей.

Определение 1. *Допустимым управлением будем называть кусочно-постоянную функцию времени* $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, *принимающую два значения:* 0 *и* $\tilde{u} > 0$. *При этом количество переключений u с одного значения на другое не более двух и последнее значение равно* 0.

Смысл предлагаемого управления мотивируется двумя факторами: простотой практической реализуемости и возвратом фазовой точки на цилиндрическую поверхность системы (3), которой принадлежит исходная траектория, то есть траектория, содержащая начальную точку M_0. Второй фактор объясняется желанием нанести меньший ущерб биосообществу, который вызван внешним вмешательством (управлением).

Постановка задачи. Для начальной точки $M_0 = (x_0, y_0, 0)$, где $\frac{x_0}{y_0} > \lambda$, найти такое допустимое управление u, что:

1) $n(t, M_0, u) > 0$ для любого $t > 0$;

2) $\dot{n}(t, M_0, u) > 0$ для любого $t \geqslant 0$, $u > 0$.

Замечание 1. *Второе условие связано с тем, что в процессе управления пищевая привлекательность не должна уменьшаться.*

2. Метод касательного управления

Пусть

$$\lambda \leqslant \frac{m}{ak}, \tag{4}$$

т.е. хищнику для поддержания всех жизненных функций требуется небольшое количество жертв в единицу времени. Случай $\lambda > \frac{m}{ak}$ будет рассмотрен в другой работе. Если выполнено условие (4), то положение равновесия ситемы (1) при $u = 0$ – $P = \left(\frac{m}{bk}, \frac{a}{b}\right) \in P^+ = \{(x, y, 0) : x > \lambda y\}$. Из выпуклости траекторий системы (1) следует, что существует и единственна траектория системы (1), касающаяся прямой $x = \lambda y$, причем нетрудно показать, что точка касания $Q = \left(\frac{\lambda(a+m)}{b(1+k\lambda)}, \frac{a+m}{b(1+k\lambda)}\right)$ (см. рис. 1). Касательную траекторию обозначим через σ_τ.

Определение 2. $l(u)$ *– множество точек* $z \in P^+$ *таких, что положительная полутраектория системы (3), начинающаяся в точке z, впервые возвращается на* $\pi = \{(x, y, 0) : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, *попадая на интервал* (OQ) *(см. рис. (1)).*

Очевидно, что $l(u) \subset P^+$, $Q \in \overline{l(u)}$ – замыкание $l(u)$. Кривая $l(0)$ разбивает область P^+ на два непересекающихся подмножества P_1^+ и P_2^+ такие, что $P^+ = P_1^+ \cup P_2^+$, причем $l(0) \subset P_1^+$.

Несложно показать, что если $M(x_0, y_0, 0) \in P_1^+$, то $u = 0$ для любого $t \geqslant 0$ является решением задачи, то есть такими начальными точками управлять не нужно. Если же $M(x_0, y_0, 0) \in P_2^+$, то для решения задачи требуется найти допустимое управление, что и сделано в работе.

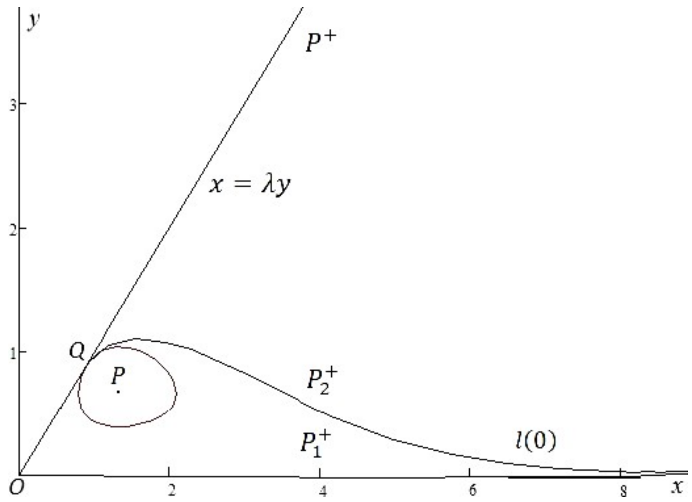

Рис. 1. График кривой $l(u)$ при $u = 0$

Пусть $M_0(x_0, y_0, 0) \in P_2^+$, $\sigma(M_0, 0)$ – проекция траектории $r(M_0, 0)$ на плоскость Oxy. Для M_0 построим процесс управления, при котором выполнены условия 1–2 задачи.

Процесс управления

Введем обозначения:

C – первый образ точки $A = \sigma(M_0, 0) \cap l(0)$ на плоскость $x = \lambda y$ при отображении вдоль траектории системы (3) при $u = 0$, причем $C(x(t_1, M_0, 0), y(t_1, M_0, 0), n(C))$, где $t_1 = \min\{t : t \in [0, T) : x = \lambda y\}$,

$$n(C) = \int_0^{t_1} (x - \lambda y) d\tau \tag{5}$$

(T – период $\sigma(M_0, 0)$, в интеграле (5) при $t = 0$ $(x(0, M_0, 0), y(0, M_0, 0)) = A$);
$\tilde{u} = (k + \frac{1}{\lambda}) b x(t_1, M_0, 0) - a - m$;
$\tilde{T}$ – период $\sigma(x(t_1, M_0, 0), y(t_1, M_0, 0), \tilde{u})$;
$\tilde{\Delta} = \frac{a\tilde{T}}{b} \left(\frac{m + \tilde{u}}{ak} - \lambda\right)$;
k_1 – наименьшее натуральное число, при котором выполнено неравенство

$$\int_0^{t_1} (x - \lambda y) d\tau + k_1 \tilde{\Delta} \geqslant n(C) \tag{6}$$

(в интеграле (6) при $t = 0$ $(x(0, M_0, 0), y(0, M_0, 0)) = M_0$).

Положим
при $0 \leqslant t < t_1$

$$u = 0;$$

при $t_1 \leqslant t < t_1 + k_1 \tilde{T}$

$$u = \tilde{u};$$

при $t \geqslant t_1 + k_1 \tilde{T}$

$$u = 0.$$

Доказано, что построенный процесс управления является решением поставленной задачи.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00092, https://rscf.ru/project/23-21-00092/.

Список литературы

1. Элтон Чарльз С. Экология нашествий животных и растений / Пер. с англ. Ю. И. Лашкевича; Под ред. и с предисл. проф. Н.П. Наумова. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 230 с.
2. Кириллов А.Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6, № 2. С. 318–336.