

О МОДЕЛЯХ УДЕРЖАНИЯ ЧЕЛОВЕКОМ РАВНОВЕСИЯ ПРИ СТОЯНИИ НА КАЧЕЛЯХ SEESAW

П.А. Кручинин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Россия, 119992, Москва, Ленинские горы
E-mail: pkruch@mech.math.msu.su

Н.В. Алексеева

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Россия, 119992, Москва, Ленинские горы
E-mail: mhp3508@mail.ru

Ключевые слова: равновесие, стабилизация, область управляемости, постуральный контроль, оптимальное управление.

Аннотация: Рассматривается модель удержания человеком равновесия при фронтальной ориентации качелей seesaw: сегмента цилиндра, цилиндрическая поверхность которого касается опорной плоскости. Модель человека - трехзвенная система, звенья которой соединены шарнирами. Два звена соединены шарнирно с плоскостью seesaw и моделируют ноги человека, третье - туловище шарнирно соединено с "ногами". Управлением является ограниченный по величине суммарный момент в тазобедренных суставах. Построена область управляемости линеаризованной системы при наличии ограничений управляющего момента. Размеры этой области сопоставлены с амплитудами колебаний человека, удерживающего равновесие на seesaw. Построено управление, максимизирующее область притяжения системы при наличии ограничений управляющего момента.

1. Введение

Математические модели процессов регуляции позы человека должны учитывать, что поддержание человеком вертикальной позы осуществляется путём приложения управляющих воздействий (моментов) в суставах его конечностей. Результаты математического моделирования можно сопоставлять с результатами экспериментов. Одним из движений, требующих подобного анализа, является удержание человеком равновесия на подвижной опоре в виде качелей seesaw. Качели представляют собой сегмент цилиндра, цилиндрическая поверхность которого касается горизонтальной опорной плоскости. Соответствующий тест в настоящее время приобрел популярность и используется в биомеханических исследованиях и в спортивной медицине [1-3]. В связи с этим представляется интересным выбор и исследование различных вариантов управления для математической модели колебаний антропоморфных систем на seesaw. Моделирование может использовать решение задач синтеза управления, оптимизирующего различные функционалы. Одним из таких управлений может служить управление максимизирующее область притяжения неустойчивого положения равновесия системы при наличии ограничений управляющего момента. Задачам построения такого управления при стабилизации вертикальной позы человека, стоящего на seesaw, совершающего качания в сагиттальной плоскости посвящены

работы [4, 5]. В настоящем докладе рассмотрим движение подобной системы при ориентации seesaw, совершающего качания во фронтальной плоскости.

2. Уравнения движения

Рассмотрена плоская задача стабилизации малых колебаний трёхзвенной конструкции, установленной на seesaw. Приведенная система может служить моделью удержания человеком равновесия при фронтальной ориентации seesaw. Качели представляют собой сегмент цилиндра, в качестве модели человека рассмотрена трехзвенная конструкция, звенья которой соединены шарнирами в точках S_1, S_2, S_3, S_4 и образуют параллелограмм, как показано на рис.1. Туловище остается перпендикулярным к линии соединения тазобедренных суставов S_2S_3 . Система совершает плоскопараллельное движение, без проскальзывания. Все связи в системе идеальны. Управлением является суммарный момент Q , создаваемый в «тазобедренных суставах» – шарнирах S_2 и S_3 . Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Введем обобщенные координаты: φ – угол поворота сисо относительно вертикали, α – угол отклонения стержней S_1S_2 и S_4S_3 от вертикали.

Уравнения малых колебаний в окрестности неустойчивого положения равновесия для такой системы имеют вид

$$(1) \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{D}Q.$$

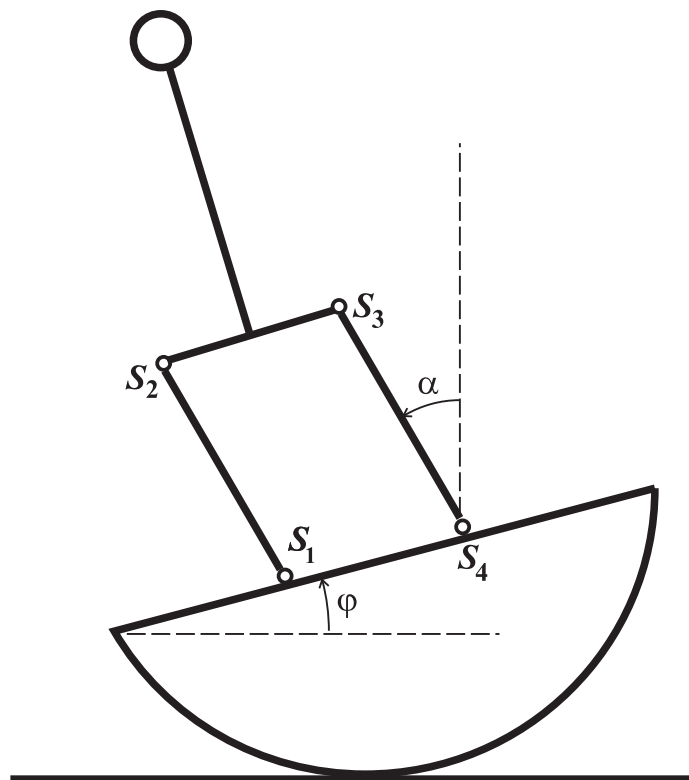


Рис. 1. Схема механической модели.

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}; \mathbf{K} = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Здесь \mathbf{M} – приведенная матрица инерции, компоненты которой зависят от масс-инерционных и геометрических параметров системы, k – коэффициенты момента вязкого трения в суставах, w и v коэффициенты потенциала сил тяжести, также зависят от масс и геометрических параметров системы

Отметим, что приведенная система управляема по Калману.

Будем считать, что управляющий момент ограничен по абсолютной величине:

$$(2) \quad |Q| \leq Q_0,$$

где $Q_0 = const$.

3. Стабилизация системы при ограничении величины момента

3.1. Стабилизация в случае единственного положительного корня

Система (1) при $Q=0$ для большинства значений масс геометрических параметров seesaw может иметь одно положительное собственное значение, одно отрицательное и два комплексных с отрицательной действительной частью. Для такой системы по методике, описанной в [4, 6], построено управление, стабилизирующее вертикальное неустойчивое положение перевернутого маятника и горизонтальное положение площадки сисо. Для этого преобразуем систему (1) к жордановым переменным и выделим из неё уравнение, отвечающее положительному собственному значению μ , которое описывает поведение «неустойчивой» жордановой координаты y

$$(3) \quad \dot{y} = \mu y + dQ.$$

В этом уравнении $d \neq 0$, поскольку исходная система вполне управляема в смысле Калмана. Управление зададим в виде

$$(4) \quad Q = Q_* = -\gamma y,$$

где постоянный коэффициент γ удовлетворяет неравенству $\mu - d\gamma < 0$. Такое управление обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения (3) и всей системы.

При ограничении (2) построенное управление становится нелинейным. Тогда система имеет область управляемости U -- множество начальных состояний, из которых система может быть приведена в начало координат при помощи ограниченного условием (2) управляющего воздействия Q .

Управление

$$(5) \quad Q = \begin{cases} -Q_0 & \text{при } Q_* < -Q_0 \\ Q_* & \text{при } |Q_*| < Q_0, \\ Q_0 & \text{при } Q_* > Q_0 \end{cases}$$

обеспечивает максимально возможную область притяжения тривиального решения уравнения (3) и всей системы (1). Эта область описывается неравенством:

$$(6) \quad |y| < Q_0 |d|/\mu.$$

Неравенство (6) ограничивает только одну переменную y . Но эта переменная является линейной комбинацией всех четырёх фазовых переменных системы (1). Поэтому неравенство (6) накладывает условие на все эти фазовые переменные и описывает гиперслон в четырехмерном фазовом пространстве. Значения $\pm\alpha_{\text{sup}}$ и $\pm\varphi_{\text{sup}}$ пересечения координатных осей α и φ гиперплоскостями, ограничивающими этот слон,

определяют значения углов α и φ , такие, что при начальных условиях $|\alpha_0| < \alpha_{\text{sup}}$ (или $|\varphi_0| < \varphi_{\text{sup}}$) и нулевых прочих начальных значениях, система возвратится в нулевое положение равновесия при управлении (5).

3.2. Стабилизация в случае двух положительных корней

В ситуациях, когда высота seesaw становится близкой к радиусу его окружности система (1) может иметь два положительных действительных корня и 2 отрицательных. В этом случае в соответствии с [5,6] после приведения системы (1) к жордановым переменным, выделим два уравнения, отвечающие различным положительным собственным значениям μ_1 и μ_2 , которые будут описывать поведение «неустойчивых» жордановых координат y_1 и y_2 .

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \mu_1 y_1 + d_1 Q \\ \dot{y}_2 &= \mu_2 y_2 + d_2 Q \end{aligned}$$

В этом уравнении также $d_1 \neq 0$ и $d_2 \neq 0$, поскольку исходная система вполне управляема в смысле Калмана.

Граница ∂U множества управляемости U для (7) при ограничении (2) состоит [6] из двух интегральных траекторий системы (7), проходящих через точки

$$\left(\frac{d_1}{\mu_1} Q_0, \frac{d_2}{\mu_2} Q_0 \right) \text{ и } \left(-\frac{d_1}{\mu_1} Q_0, -\frac{d_2}{\mu_2} Q_0 \right).$$

Эти траектории получены при $Q = \pm Q_0$. Их уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_1}{d_1 Q_0} \right) \right]^{\mu_1} &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_2}{d_2 Q_0} \right) \right]^{\mu_2}; \\ \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_1}{d_1 Q_0} \right) \right]^{\mu_1} &= \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_2}{d_2 Q_0} \right) \right]^{\mu_2}. \end{aligned}$$

Так как две остальные жордановы координаты всегда устойчивы, область управляемости системы в рассматриваемом случае представляет собой цилиндрическую поверхность, которая остается цилиндрической и после обратного преобразования от жордановых координат к размерным. Эта поверхность пересекает координатные оси α и φ при значениях $\pm \alpha_{\text{sup}}$ и $\pm \varphi_{\text{sup}}$. Сечение этой границы плоскостью $\dot{\alpha} = \dot{\varphi} = 0$ показано на рис. 2.

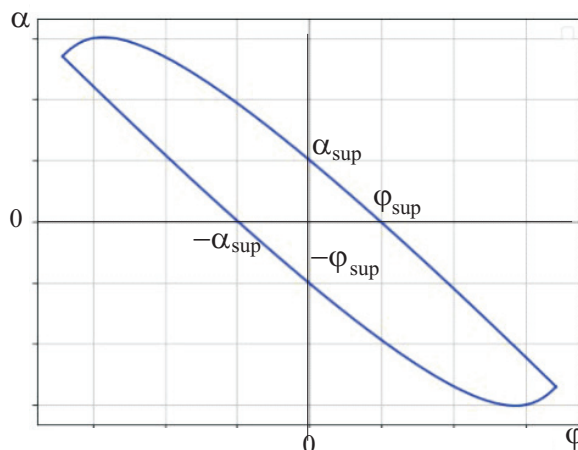


Рис. 2. Сечение границы области управляемости системы с двумя положительными корнями плоскостью $\dot{\alpha} = \dot{\varphi} = 0$.

Она близка к области начальных положений системы (1), при которых последняя может быть приведена в положение равновесия в случае нулевых начальных скоростей.

Отметим, что стабилизация системы (1) в этом случае достигается управлением вида (5) при

$$Q_* = -\gamma \left(\frac{d_2}{\mu_2} y_1 - \frac{d_1}{\mu_1} y_2 \right)$$

при условии

$$|\gamma| > \gamma_* = \frac{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{|d_1 d_2 (\mu_1 - \mu_2)|} \quad \text{sign} \gamma = -\text{sign} (d_1 d_2).$$

Граница области притяжения такого управления стремится к границе области управляемости при $\gamma \rightarrow \infty$, и рассмотренная область управляемости для значений $\gamma > 2\gamma_*$ оказывается неплохой оценкой сверху для области притяжения.

4. Заключение

Таким образом, изменение параметров seesaw может приводить к тому, что простая модель, описывающая удержание человеком равновесия на качелях seesaw во фронтальной плоскости, меняет степень неустойчивости. Это порождает достаточно резкое сужение её области управляемости при ограниченных величинах управляющего момента. Это обстоятельство может объяснять заметные затруднения, которые испытывает человек, при удержании равновесия на «высоких» seesaw.

Работа выполнена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020-2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2020-923).

Список литературы

1. Ivanenko Y.P., Levik Y.S., Talis V.L., Gurfinkel V.S. Human equilibrium on unstable support: the importance of feet-support interaction // *Neuroscience Letters*. 1997. Vol. 235. P. 109-112.
2. Guillou E., Dupui P., Golomer E. Dynamic balance sensory motor control and symmetrical or asymmetrical equilibrium training // *Clinical Neurophysiology*. 2007. Vol. 118. P. 317-324.
3. Ghram A., Abidi S., Ben Abdessamie A., et al. Impact of Gender, Change of Base of Support, and Visual Deprivation on Postural Balance Control in Young Healthy Subjects // *Int. J Sport Stud Health*. 2021. Vol. 4, No. 2. P e126891. <https://doi.org/10.5812/intjssh-126891>
4. Гугаев К.В., Кручинин П.А., Формальский А.М. Модель удержания человеком равновесия на подвижной опоре в виде пресс-папье // *Прикладная математика и механика*. 2016. Т. 80, № 4. С. 450-460.
5. Формальский А.М., Кручинин П.А., Войцицкая К.Л. Стабилизация двойного перевернутого маятника, установленного на качелях seesaw // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85, № 6. С. 683-698.
6. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.