УДК 517.977

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КАСКАДНЫМИ СИСТЕМАМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Аргучинцев

Иркутский государственный университет

Россия, 664003, Иркутск, К. Маркса ул., 1

E-mail: arguch@math.isu.ru

Д.Е. Копылов

Иркутский государственный университет

Россия, 664003, Иркутск, К. Маркса ул., 1

E-mail: it-daniil@yandex.ru

Ключевые слова: гиперболическая система, каскадная система, минимизация нормы конечного состояния, вариационное условие оптимальности, редукция задачи.

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления линейной гиперболической системой первого порядка, в которой функциональный параметр в правой части определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для случая квадратичного целевого функционала предложена неклассическая точная формула приращения. Доказано условие оптимальности вариационного типа. Осуществлена редукция исходной задачи к задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Исследуется задача оптимального управления составной системой, состоящей из гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений. Композиции взаимосвязанных гиперболических и обыкновенных дифференциальных уравнений используются при моделировании целого ряда процессов динамики популяций, взаимодействия потоков жидкости и газа с твердыми телами, динамики плазмы, динамики кровотока и др. Функциональный параметр в правой части определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В статье [2] подобная задача была рассмотрена для линейного целевого функционала и линейной правой части обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов, зависящих от управления. На основе применения двух симметричных нестандартных вариантов формул приращения целевого функционала первого порядка получены два симметричных вариационных условия оптимальности. Это позволило свести исходную задачу к задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе изучен случай квадратичного целевого функционала в виде квадрата нормы отклонения конечного состояния от заданной функции. Для развития идеи [1] пришлось применить уже формулу приращения второго порядка и матричные импульсы Р.Ф. Габасова. Основной результат заключается в редукции исходной задачи к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичным критерием качества. Редукция задачи дает возможность очень существенно уменьшить объем вычислительной работы. Наиболее сложным и громоздким является интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными. Применение классических итерационных методов вынуждает решать начально-краевые задачи для исходной и сопряженной систем гиперболических уравнений на каждой итерации. Полученный результат позволяет ограничиться лишь тремя интегрированиями гиперболических систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = \Phi(s,t) + g(s,t) + C(t)y, \tag{1}$$

$$(s,t) \in \Pi,\ \Pi = S \times T,\ S = [s_0, s_1], T = [t_0, t_1].$$

Здесь $x(s,t)$ – n-мерная вектор-функция, $y(t)$ – m-мерная вектор-функция, $A(s,t)$ и $C(t)$ – соответственно $n \times n$ и $n \times m$- матрицы.

Предполагаем, что система (1) записана в инвариантном виде, то есть матрица $A(s,t)$ – диагональная. Дополнительно введем предположение, что диагональные элементы $a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в Π:

$$a_i(s,t) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1;$$

$$a_i(s,t) = 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2;$$

$$a_i(s,t) < 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \dots, n.$$

Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размера $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размера $(n - m_2) \times (n - m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы A соответственно. Из вектора состояния x выделим два подвектора, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A:

$$x^+ = (x_1, x_2, \dots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \dots, x_n).$$

Начально-краевые условия для системы (1) заданы в начальных точках соответствующих семейств характеристик системы гиперболических уравнений:

$$x(s,t_0) = x^0(s),\ s \in S; \quad x^+(s_0,t) = \eta(t), \quad x^-(s_1,t) = \mu(t),\ t \in T. \tag{2}$$

Функция $y(t)$ определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = B(u(t),t)y(t) + d(u(t),t), \quad t \in T, \tag{3}$$

$$y(t_0) = y^0,$$

$B(t)$ – $m \times m$- матрица.

Задача рассматривается в классе ограниченных и измеримых управляющих воздействий $u(t)$, удовлетворяющих почти всюду на отрезке T поточечным ограничениям типа включения

$$u(t) \in U, \ t \in T, \tag{4}$$

где U – компакт из E^r.

Целью задачи будем считать минимизацию квадратичного функционала (нормы конечного состояния процесса)

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_S \|x(s,t_1) - z(s)\|^2 \, ds, \tag{5}$$

где $z(s)$ – заданная функция, а под нормой понимается обычная евклидова норма в n-мерном пространстве.

При выполнении достаточно стандартных предположений, включая условия согласования (2), существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1)–(3) из класса непрерывных в Π функций. Отметим, что данное решение, вообще говоря, не является классическим: производные функций x_i по независимым переменным s и t могут не существовать. Однако каждая компонента x_i непрерывно дифференцируема вдоль соответствующего семейства характеристик гиперболической системы.

3. Краткая характеристика результата

Несмотря на линейность дифференциальных уравнений и выпуклость целевого функционала (5), рассматриваемая задача оптимального управления не относится к классу линейно-выпуклых. Это вызвано тем, что матрица коэффициентов в правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3) зависит от управления. Поэтому принцип максимума Л.С. Понтрягина здесь не является достаточным условием оптимальности, а для численного решения задач подобного вида обычно применяются общие методы нелинейной теории оптимального управления. Их недостатком является необходимость на каждой итерации решать исходную и сопряженную начально-краевые задачи для уравнений с частными производными.

На основе методики [1] в задаче с линейным критерием качества получены нестандартные формулы приращения целевого функционала для двух произвольных допустимых процессов. Формулы являются точными (без остаточных членов). Но «платой» за это является то, что исходную начально-краевую задачу (1)–(3), либо сопряженную задачу надо решать на возмущенном управлении. Конечным результатом явились два симметричных вариационных условия оптимальности, которые позволили провести редукции исходной задачи к задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе рассмотрен случай квадратичного целевого функционала (5). При этом исследование сильно усложняется. Для развития идеи [1] пришлось применить уже формулу приращения второго порядка и матричные импульсы Р.Ф. Габасова. Удалось получить только один вариант точной (без остаточного члена) формулы приращения целевого функционала и доказать соответствующее необходимое и достаточное условие оптимальности вариационного типа.

Основной результат заключается в редукции исходной задачи к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичным критерием качества. Редукция задачи позволяет весьма существенно уменьшить объем вычислительной работы. Наиболее сложным и громоздким является интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными. Применение классических итерационных методов вынуждает решать начально-краевые задачи для исходной и сопряженной систем гиперболических уравнений на каждой итерации. Полученный результат позволяет ограничиться лишь двумя-тремя интегрированиями гиперболических систем.

Задача оптимального управления, к которой свелась исходная задача, имеет специфическую структуру. Ее целевой функционал квадратичный, правая часть системы обыкновенных дифференциальных уравнений линейна по состоянию, но матрица коэффициентов в этой системе зависит от управления. Для решения подобных задач в билинейных системах с квадратичным функционалом представляется перспективным применять разработанные в последнее время эффективные методы решения соответствующих билинейных задач. Использование формул приращения второго порядка также позволяет применять предлагаемый подход для улучшения особых неоптимальных управлений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296/.

Список литературы

1. Аргучинцев А.В. Оптимальное управление гиперболическими системами. М.: Физматлит, 2005. 168 с.
2. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations // Games. 2021. Vol. 12, No. 1. P. 23.