УДК 517.977.1

# ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ АБСТРАКТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

**М.И.Гусев**

*Институт Математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН*

Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

E-mail: gmi@imm.uran.ru

**Ключевые слова:** нелинейное отображение, множество достижимости, граничная точка, принцип максимума.

**Аннотация:** Предлагается единый подход к задаче описания границы множества достижимости нелинейной управляемой системы при различных типах ограничений на управление. В рамках данного подхода множество достижимости трактуется как образ подмножества банахова пространства при его отображении в другое банахово пространства нелинейным отображением вход-выход, порождаемом рассматриваемой системой. С использованием конструкций негладкого анализа доказаны необходимые условия экстремума для прообразов граничных точек множества достижимости. Из указанных условий следует характеризация граничных точек множества достижимости при геометрических, интегральных и комбинированных ограничениях на управление.

## 1. Введение

Управляемую систему, описываемую дифференциальным или разностным уравнением, часто удобно рассматривать как отображение, сопоставляющее входу системы (управлению или возмущению) ее выход (траекторию, наблюдаемый сигнал, вектор состояния в заданный момент времени). В рамках данной трактовки множество достижимости (МД) системы является образом множества допустимых управлений. В докладе рассматривается задача характеризации граничных точек образа множества при нелинейном отображении банаховых пространств в виде условий экстремума для их прообразов (управлений). Применение данных условий к управляемым системам с геометрическими, интегральными и комбинированными ограничениями позволяет записать эти условия в форме принципа максимума Понтрягина.

Для нелинейной управляемой системы с геометрическими (поточечными) ограничениями на управление известно, что допустимое управление, переводящее траекторию на границу МД, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [1, 2]. На основе решения вспомогательных экстремальных задач и использования принципа максимума разработан ряд алгоритмов вычисления МД (см., например, [3–7]) .

Для систем с интегральными ограничениями на управление некоторые свойства МД и алгоритмы их построения приведены в [8–13]. В частности, в случае интегральных квадратичных ограничений в [8, 12] было показано, что любое допустимое управление, ведущее на границу МД, обеспечивает локальный экстремум в некоторой задаче оптимального управления и поэтому удовлетворяет принципу максимума. Этот результат был обобщен в [14] для нескольких смешанных интегральных ограничений, зависящих как от управляющих переменных, так и от переменных состояния. В статье [15] (см. также [16]) проблему достижимости было предложено рассматривать в терминах нелинейных отображений банаховых пространств. В этой статье мы распространяем результаты [15] на более широкий класс абстрактных систем управления. В статье ослаблены условия [15], что позволило рассмотреть задачу с интегральными и геометрическими ограничениями в рамках единой схемы с использованием конструкций негладкого анализа.

## 2. Условия экстремума для границы множества достижимости

Пусть $X, Y$ – действительные банаховы пространства, $U \subset X$ . Абстрактной управляемой системой будем называть отображение $F : U \to Y$ . Здесь $u \in U$ – управление, множество $U$ интерпретируется как множество допустимых управлений. Множество достижимости (МД) $G$ системы определяется равенством $G = \big\{y \in Y : y = F(u),\ u \in U\big\}$. Таким образом, $G = F(U)$ это образ $U$ при отображении $F$. Далее мы считаем, что $U = \big\{u \in X : \varphi(u) \leqslant \mu\big\}$, где $\varphi : X \to \mathbb{R}$ – непрерывный функционал, $\mu > 0$.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0, \quad u(\cdot) \in U. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $U \subset \mathbb{L}_1$. Функции $f_1 : [t_0, t_1] \times R^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times r}$ и их производные по $x$ непрерывны по $(t, x)$ и удовлетворяют неравенствам $\|f_1(t, x)\| \leqslant l_1(t)(1 + \|x\|), \quad \|f_2(t, x)\|_{n\times r} \leqslant l_2(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x \in \mathbb{R}^n$ где $l_1(t),\ l_2(t)$ – интегрируемые по Лебегу на $[t_0, t_1]$ функции. Для каждого интегрируемого управления $u(t)$ на $[t_0, t_1]$ существует единственное абсолютно непрерывное решение $x(t, u(\cdot))$ уравнения (1).

Множество достижимости $G(t_1)$ системы (1) в момент времени $t_1$ при ограничении $u(\cdot) \in U$ определяется как $G(t_1) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : y = x(t_1, u(\cdot)),\ u(\cdot) \in U\big\}$. В рамках предлагаемой схемы можно рассматривать следующие виды ограничений на управление:

1. **Геометрические ограничения** на управление заданные условием $\gamma(u(t)) \leqslant 1$, a.e. $t \in [t_0, t_1]$, где $\gamma(u)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}^r$. В этом случае $X = \mathbb{L}_\infty$, $\varphi(u(\cdot)) = \operatorname{ess\,sup}_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \gamma(u(t))$.
2. **Интегральные ограничения** вида $\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_p} \leqslant 1$, где $p > 1$. Для этих ограничений $X = \mathbb{L}_p$, $\varphi(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^p dt$.

3. **Изопериметрические ограничения** на управление и траекторию

$$\varphi(u(\cdot)) := \int_{t_0}^{t_1} \big(Q(t,x(t)) + u^\top(t)R(t,x(t))u(t)\big)\,dt \leqslant \mu, \quad u(\cdot) \in \mathbb{L}_2,$$

где $Q(t,x)$ и $R(t,[x)$ непрерывны, $R(t,[x)$ положительно определена. Во всех перечисленных случаях $Y = \mathbb{R}^n$, а отображение соответствующего банахова пространства $X$ в $Y$ задано следующим образом $F(u) = F(u(\cdot)) = x(t_1, u(\cdot))$. При указанных выше предположениях (см., например, [8]) $F(u(\cdot))$ имеет непрерывную производную Фреше в соответствующем пространстве $X$, определяемую равенством $F'_u(u(\cdot))\delta u(\cdot) = \delta x(t_1)$.

Здесь $\delta x(t)$ решение системы (1) линеаризованной в окрестности $(x(t,u(\cdot)),u(t))$: $\delta\dot{x}(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t)$, $\delta x(t_0) = 0$, где $A(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}\big[f_2(t,x(t))u(t)\big]$, $B(t) = f_2(t,x(t))$. Если линеаризованная система вполне управляема на $[t_0,t_1]$, то $\operatorname{Im} F'(u(\cdot)) = \mathbb{R}^n$.

Обозначим через $B_X(x,r)$ и $B_Y(y,r)$ шары радиуса $r$ с центрами $x \in X$, $y \in Y$ соответственно. Дальнейший анализ основан на известной теореме Люстерника

**Теорема 1** ( [17, Теорема 2]). *Пусть отображение $F$ банахова пространства $X$ в банахово пространство $Y$ непрерывно дифференцируемо по Фреше в точке $\hat{u}$ и $\operatorname{Im} F'(\hat{u}) = Y$. Тогда найдутся окрестность $V$ точки $\hat{u}$ и число $s > 0$ такие, что для любого $B_X(u,r) \subset V$ справедливо включение $B_Y(F(u), sr) \subset F(B_X(u,r))$.*

Условие $\operatorname{Im} F'(\hat{u}) = Y$ называется условием регулярности отображения $F$ в точке $\hat{u}$. Из Теоремы 1 получаем следующее утверждение

**Теорема 2.** *Пусть $W$ – некоторая окрестность $U$, отображение $F : W \to Y$ регулярно в точке $\hat{u} \in U$ и функционал $\varphi$ непрерывен в $\hat{u}$. Для того, чтобы $\hat{x} = F(\hat{u}) \in \partial G$ необходимо, чтобы точка $\hat{u}$ была локальным минимумом в задаче*

$$\varphi(u) \to \min, \quad F(u) = \hat{x} \tag{2}$$

*и выполнялось равенство $\varphi(\hat{u}) = \mu$.*

Выписывая необходимые условия локального минимума для (2) получаем

**Теорема 3.** *Пусть $\hat{u} \in U$, $F(\hat{u}) = \hat{x} \in \partial G$, отображение $F(u)$ регулярно, а $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируем в точке $\hat{u}$ и $\varphi(\hat{u}) \neq 0$. Тогда найдется $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| = 1$ такой, что $\hat{u}$ удовлетворяет необходимым условиям экстремума в задаче*

$$\langle y^*, F(u)\rangle \to \min, \quad \varphi(u) \leqslant \mu, \tag{3}$$

*$\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает билинейную форму устанавливающую двойственность $Y$ и сопряженного пространства $Y^*$.*

Как нетрудно заметить, задачу (3) можно записать в следующем эквивалентном виде $\langle z^*, y\rangle \to \max, \quad y \in G$, где $z^* = -y^*$. Последняя задача состоит в вычислении значения опорной функции $G$, точка, в которой достигается максимум, называется опорной точкой. Множество $G$ для нелинейного отображения, как правило, невыпукло. Поэтому не любая точка $\hat{x} \in \partial G$ является опорной. Однако, она удовлетворяет необходимым условиям экстремума, все равно как если бы она была таковой.

Пусть теперь $\varphi$ не дифференцируем, но удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности $\hat{u}$. Будем далее считать, что $Y = \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\partial_C f(u)$ субдифференциал Кларка функции $f(u)$ в точке $u$. Если $f(u)$

липшицева в окрестности $u$, то $\partial_C f(u) \neq \varnothing$ – выпуклое слабо* компактное множество. В предположении, что $0 \notin \partial_C f(\hat{u})$ выпишем необходимые условия оптимальности [18] для задачи (2). После некоторых преобразований получим включение $-F'^*(\hat{u})y^* \in \partial_C\varphi(\hat{u})$, $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| \neq 0$. Как нетрудно убедиться это включение является необходимым условием оптимальности $\hat{u}$ и в задаче (3). Таким образом, утверждение Теоремы 3 справедливо и в случае локально липшицевого функционала $\varphi(u)$. Следовательно, оно применимо не только к задачам с интегральными ограничениями, но и к задачам с геометрическими ограничения, для которых $\varphi(u)$ не является дифференцируемым. Отметим, что для отображения $F(u(\cdot))$ определяемого системой (1) имеет место равенство $F'^*(u(\cdot))y^* = B^\top(\cdot)\,p(\cdot)$ где $p(t)$ – решение сопряженной системы $\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t), \quad p(t_1) = y^*$, матрицы $A(t), B(t)$ – матрицы системы (1) линеаризованной в окрестности $u(\cdot)$. Из данного представления и Теоремы 3 следует принцип максимума Понтрягина для граничных управлений как для случая геометрических, так и интегральных ограничений [19].

Рассмотрим далее ограничения на $u$, заданные системой неравенств

$$U = \{u \in X : \varphi_i(u) \leqslant \mu_i, \quad i = 1, ..., k, \tag{4}$$

где $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ – функционалы, $\mu_i$, $i = 1, ..., k$ заданные положительные числа. Без ограничения общности можно считать, что $\mu_i = 1$, $i = 1, ..., k$, тогда (4) можно заменить единственным ограничением $\varphi(u) \leqslant 1$, положив $\varphi(u) = m(\varphi_1(u), ..., \varphi_k(u)), \quad m(x) = m(x_1, ..., x_k) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} x_i$.

Так как $m(x)$ непрерывна, функционал $\varphi(u)$ будет непрерывным в точке непрерывности функционалов $\varphi_i(u)$. Поэтому для описания границы МД применима Теорема 2. Вывод условий оптимальности в задаче (3) в этом случае более сложен, так как $m(x)$ не дифференцируема. Однако $\varphi(u) = m(\varphi_1(u), ..., \varphi_k(u))$ будет локально липшицевым, если таковыми являются функционалы $\varphi_i(u)$. Кроме того, если каждый из функционалов $\varphi_i(u)$ является либо выпуклым либо непрерывно дифференцируемым в $\hat{u}$ то $\partial_C\varphi(\hat{u}) = \mathrm{co}\bigcup_{i\in I(\hat{u})} \partial_C\varphi_i(\hat{u})$, где $I(\hat{u}) = \{i : \varphi_i(\hat{u}) = \varphi(\hat{u})\}$, $\mathrm{co}\, A$ – выпуклая оболочка $A$ [18].

Если все функционалы $\varphi_i$непрерывно дифференцируемы в точке $\hat{u}$, то $\partial_C\varphi_i(\hat{u}) = \mathrm{co}\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k}\{\varphi_i'(\hat{u})\}$. Условие $0 \notin \partial_C\varphi_i(\hat{u})$ принимает здесь вид

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant k} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \alpha_i(\varphi_i(\hat{u}) - 1) = 0, \quad i = 1, ..., k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \alpha_i\varphi_i^{'}(\hat{u}) = 0.$$

Оно, например, выполнено, если $\varphi_i(\hat{u})$ положительно линейно независимы, и необходимое условие для включения $F(\hat{u}) \in \partial G$ можно записать в виде $F'^*(\hat{u})z^* = \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \alpha_i\varphi_i'(\hat{u}), \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \alpha_i = 1$. Последнему условию можно придать форму принципа максимума Понтрягина, если речь идет об отображении, определяемом системой (1) [14].

Наконец, рассмотрим управляемую систему с комбинированными ограничениями – интегральным и геометрическим. Пусть $X = \mathbb{L}_\infty$ и ограничения имеют вид $\varphi_i(u(\cdot)) \leqslant 1$, $i = 1, 2$ где $\varphi_1(u(\cdot)) = 1/2\langle u(\cdot), u(\cdot)\rangle = 1/2\int_{t_0}^{t_1} u^\top(t)u(t)dt, \quad \varphi_2(u(\cdot)) = \operatorname{ess\,sup}_{t_0\leqslant t\leqslant t_1} \gamma(u(t))$. Здесь $\gamma$ – выпуклая функция, такая что $\{u : \gamma(u) < 1\} \neq \varnothing$. Условие $F'^*(\hat{u}(\cdot))z^* \in \partial_C\varphi(\hat{u}(\cdot))$ принимает вид $F'^*(\hat{u}(\cdot))z^* - \lambda\hat{u}(\cdot) \in (1-\lambda)\partial\varphi_2(\hat{u}(\cdot))$

для некоторого $\lambda \in [0,1]$. Опрелим гамильтониан задачи равенством $H(t,x,p,\sigma,u) = -\sigma u + p^\top(f_1(t,x) + f_2(t,x)u)$. Справедливо следущее утверждение (см. [19])

**Утверждение 1.** *Пусть* $G = \{F(u(\cdot)) : \varphi_i(u(\cdot)) \leqslant 1,\ i = 1,2\}$. *Если* $F(\hat{u}(\cdot)) \in \partial G$ *и линеаризованная в окрестности* $\hat{u}(\cdot)$ *система* (1) *вполне управляема, то найдется* $p(\cdot) \neq 0$ *и число* $\sigma \geqslant 0$ *такие, что выполнены соотношения принципа максимума Понтрягина*

$$\dot{p}(\tau) = -A(\tau)p(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial x}(\tau, x(\tau), p(\tau), \sigma, \hat{u}(\tau)), \quad \tau \in [t_0, t_1],$$
$$H(\tau, x(\tau), p(\tau), \sigma, \hat{u}(\tau)) = \max_{\gamma(v) \leqslant \mu} H(\tau, x(\tau), p(\tau), \sigma, v), \quad a.e. \quad \tau \in [t_0, t_1].$$

# Список литературы


1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов . 4-е изд. М.: Наука, 1983. 393 с.
2. Lee E. B., Marcus L. Foundations of Optimal Control Theory. New York: J. Willey and Sons Inc., 1967. 576 p.
3. Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. Построение множества достижимости интегратора Брокетта // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, Вып. 5. С. 707–724.
4. Горнов А. Ю., Финкельштейн Е. А. Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости // Автоматика и телемеханика. 2015. № 3. С. 22–31.
5. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
6. Baier R., Gerdts M., Xausa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numer. Algebra Control Optim. 2013. Vol. 3, No. 3. P. 519–548.
7. Kurzhanski A. B., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation. Systems Control Found. Appl. Vol. 85. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p.
8. Гусев М.И., Зыков И.В. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1.
9. Пацко В.С., Трубников Г.И., Федотов А.А. Множество достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление // МТИП. 2023. Vol. 5, No. 2. P. 89–104.
10. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2007. Vol. 14, No. 1–2. P. 57–73.
11. Guseinov Kh. G. Approximation of the attainable sets of the nonlinear control systems with integral constraint on controls // Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 2009. Vol. 71, No. 1–2. P. 622–645.
12. Gusev M. I. On reachability analysis of nonlinear systems with joint integral constraints // Lecture Notes in Comput. Sci. Cham: Springer. 2018. Vol. 10665 P. 219–227.
13. Polyak B. T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under $L_2$ bounded controls // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 2004. Vol. 11. P. 255–267.
14. Gusev M. I., Zykov I. V. On the geometry of reachable sets for control systems with isoperimetric constraints // Proc. Steklov Inst. Math. 2019. Vol. 304. Suppl. 1. P. S76–S87.
15. Gusev M. I. Computing the reachable set boundary for an abstract control problem // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2025, No. 1. P. 040009.
16. Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф. Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск, СО РАН, 2018. 193 с.
17. Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35, № 6. С. 11–46.
18. Clarke F. H. Optimization and Nonsmooth Analysis. J. Willey and Sons. 1983. 308 p.
19. Gusev M.I. Computing the Reachable Set Boundary for an Abstract Control System: Revisited // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, No. 2. P. 99–108.