УДК 517.97

ОБЩИЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.В. Дмитрук
Центральный экономико-математический институт РАН
Россия, 117418, Москва, Нахимовский проспект, 47
E-mail: optcon@mail.ru

Ключевые слова: задача на экстремум, ограничения неравенства, сопряженный конус, множители Лагранжа, мера Стилтьеса, регулярные ограничения.

Аннотация: Рассматривается общая задача оптимизации в банаховом пространстве с ограничениями равенства и неравенства, из которых последние заданы в виде выпуклых конусов. Приводится необходимое условие локального минимума в ней и показывается, как оно применяется для задач оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями.

1. Общий принцип Лагранжа

Основное отличие задач оптимального управления от задач классического вариационного исчисления состоит в наличии бесконечного числа ограничений типа неравенства, поэтому важно иметь стандартный аппарат для получения условий оптимальности в этих задачах. Настоящий доклад посвящен необходимым условиям. В абстрактной постановке имеем следующую задачу на экстремум в банаховом пространстве X:

$$(1) \qquad F_0(x) \to \min, \qquad f_i(x) \in K_i\,, \quad i = 1, \ldots, \nu, \qquad g(x) = 0,$$

где $g : X \to Y$ есть гладкое отображение в банахово пространство Y, а K_i – замкнутые выпуклые конусы с непустой внутренностью в банаховых пространствах $Z_i\,,\ i = 1, \ldots, \nu$. Нас интересуют необходимые условия локального минимума в некоторой точке $x_0 \in X$.

Эта постановка включает большинство как теоретических, так и прикладных задач оптимизации, в том числе задачи оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями неравенства $\Phi(t, x(t)) \leqslant 0$ и $\varphi(t, x(t), u(t)) \leqslant 0$, которые можно трактовать как принадлежность $\Phi(t, x(t))$ и $\varphi(t, x(t), u(t))$ конусам неположительных функций в пространствах C и L_∞ соответственно. Если все $Z_i = \mathbb{R}$, а $K_i = \mathbb{R}_-$, то получаем обычную *задачу нелинейного программирования* со скалярными неравенствами $f_i(x) \leqslant 0$. В общем случае ограничения $f_i(x) \in K_i$ задают бесконечное число ограничений неравенства.

Предположение 1. *Целевая функция F_0 и отображения f_i дифференцируемы по Фреше в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{D}$; оператор g строго дифференцируем в x_0 (предположения гладкости),*

Предположение 2. *Образ производной $g'(x_0)$ замкнут в Y (ослабленная регулярность ограничения равенства).*

Несмотря на то, что все отображения здесь дифференцируемы, задача (1) не является стандартной гладкой задачей, так как каждое ограничение $f_i(x) \in K_i$ может задаваться бесконечным числом скалярных неравенств (ибо пространства Z_i могут быть бесконечномерными). Поэтому задачу (1) можно назвать *полугладкой.*

Дадим здесь необходимое условие локального минимума, которое очень просто формулируется и поэтому удобно для применения в конкретных задачах.

Теорема 1. *Пусть x_0 есть точка локального минимума в задаче (1). Тогда найдутся множители Лагранжа $\alpha_0 \geqslant 0$, $z_i^* \in Z_i^*$, $i = 1, \ldots, \nu$, и $y^* \in Y^*$, не все равные нулю, такие что $z_i^* \in K_i^0$ и $\langle z_i^*, f_i(x_0)\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, \nu$ (т.е. каждый z_i^* есть внешняя нормаль к конусу K_i в точке $f_i(x_0)$), и при этом функция Лагранжа $\mathcal{L}(x) = \alpha_0 F_0(x) + \sum_{i=1}^{\nu} \langle z_i^*, f_i(x)\rangle + \langle y^*, g(x)\rangle$ стационарна в x_0:*

$$\mathcal{L}'(x_0) = \alpha_0 F_0'(x_0) + \sum_{i=1}^{\nu} z_i^* f_i'(x_0) + y^* g'(x_0) = 0. \tag{2}$$

Последнее равенство называется уравнением Эйлера–Лагранжа.

Условия дополняющей нежесткости здесь не требуются: если индекс i не активный, т.е. $f_i(x_0) \in \operatorname{int} K_i$, то в данной точке автоматически внешняя нормаль $z_i^* = 0$.

Доказательство проводится по схеме Дубовицкого–Милютина с использованием стандартных фактов функционального анализа. Оно состоит из двух шагов. На первом шаге делается переход от локального минимума в данной точке к несовместности системы (суб)линейных аппроксимаций всех ограничений и целевого функционала задачи (причем для ограничений неравенства аппроксимации берутся со строгим знаком!), а на втором шаге эта несовместность переписывается в виде соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа (см. [3–5]).

Отметим, что задача (1) допускает обобщение, в котором вместо конусов K_i участвуют выпуклые замкнутые множества Q_i с непустой внутренностью [5]. Теорема 1 остается верной и в этом случае. Мы здесь оставили ее формулировку для случая конусов как наиболее используемую.

2. Применение в оптимальном управлении

На фиксированном отрезке времени $[0, T]$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&J := F_0(x(0), x(T)) \to \min, \\
&F_i(x(0), x(T)) \leqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, d(F), \\
&K_j(x(0), x(T)) = 0, \qquad i = j, \ldots, d(K), \\
&\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),
\end{aligned} \tag{3}$$

где имеются также фазовые и смешанные ограничения

$$
\begin{aligned}
&\Phi_i(x(t)) \leqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, d(\Phi), \\
&G_j(x(t), u(t)) \leqslant 0, \quad\ i = 1, \ldots, d(G).
\end{aligned} \tag{4}
$$

Здесь $x \in AC^n[0,T]$, $u \in L^r_\infty[0,T]$, через $d(a)$ обозначена размерность вектора a.

Задача (3) без ограничений (4) называется задачей Лагранжа классического вариационного исчисления *в понтрягинской форме.*

Обратим внимание, что здесь нет ограничения типа включения $u(t) \in U$ с произвольным множеством U. Если оно задается гладкими функциями $\varphi_j(u) \leqslant 0$, то оно допустимо, и его его надо трактовать как смешанное ограничение.

Фазовые ограничения типа равенства $\Phi(x(t)) = 0$ недопустимы. Их надо дифференцировать в силу управляемой системы и заменить на начальное условие $\Phi(x(0)) = 0$ и равенство $\Phi'(x(t))f(x(t), u(t)) = 0$.

Смешанные ограничения равенства $g_s(x,u) = 0$ не вносят ничего принципиально нового (при стандартном предположении о линейной независимости градиентов g'_{su}). Для простоты изложения мы их здесь не рассматриваем.

Наша цель – получить необходимые условия *слабого минимума* для допустимого процесса $x^0(t), u^0(t)$, т.е. локального минимума относительно нормы $||x||_C + ||u||_\infty$ (минимума в равномерной окрестности и по x, и по u).

Будем предполагать, что все установочные функции задачи непрерывно дифференцируемы, и что концы исследуемой траектории $x^0(t)$ не лежат на фазовых границах; точнее, что $\Phi_i(0, x^0(0)) < 0$ и $\Phi_i(T, x^0(T)) < 0$ для всех i.

Применим к задаче (3)–(4) теорему 1. Для этого найдем общий вид внешних нормалей к конусам конусам неположительных функций $C^-[0,T]$ и $L^-_\infty[0,T]$ в пространствах $C[0,T]$ и $L_\infty[0,T]$ в их граничных точках $c^0(t)$ и $v^0(t)$.

Пусть $M = \{\, t \mid c^0(t) = 0 \,\}$ непусто. Тогда внешняя нормаль к конусу C^- в точке c^0 задается мерой Лебега–Стилтьеса $d\mu(t) \geqslant 0$ (она порождается неубывающей функцией $\mu(t)$), сосредоточенной на множестве M, т.е. $d\mu(t)\, c^0(t) \equiv 0$.

Мы будем применять этот факт к функциям $c^0_i(t) = \Phi_i(t, x^0(t))$. Тогда в качестве множителей z^*_i получаем меры $d\mu_i(t) \geqslant 0$, сосредоточенные на множествах

$$
M_i = \; \{\, t \mid \Phi_i(t, x^0(t)) = 0 \,\},
$$

и значит, выполнены условия дополняющей нежесткости $d\mu_i(t)\, \Phi_i(t, x^0(t)) \equiv 0$.
В силу предположения 2 все меры $d\mu_i$ не имеют атомов в концах отрезка $[0,T]$.

Внешние нормали к конусу L^-_∞ в его граничной точке $v^0(t)$ имеют существенно более сложное описание. Это есть неотрицательные функционалы $h \in L^*_\infty[0,T]$, сосредоточенные на множестве *почти выхода на границу* $M_\delta = \; \{\, t \mid v^0(t) \geqslant -\delta \,\}$ для любого $\delta > 0$. Мы должны при каждом j применять этот факт к функции $v^0_j(t) = G_j(t, x^0(t), u^0(t))$. Тогда функционал $h_j \geqslant 0$ и сосредоточен на множестве

$$
M_{j\delta} = \; \{\, t \mid G_j(t, x^0(t), u^0(t)) \geqslant -\delta \,\} \quad \text{при любом } \delta > 0.
$$

В некотором *регулярном случае* (см. ниже) множители h_j суть обычные интегрируемые функции $\lambda_j(t) \geqslant 0$.

Как известно, пространство L^*_∞ гораздо шире «хорошего» пространства L_1. По теореме Иосиды–Хьюитта любой функционал $h \in L^*_\infty$ имеет вид $h = \lambda + \xi$, где функционал $\lambda \in L_1$ – абсолютно непрерывный, а ξ – сингулярный. Поэтому в общем случае множители $z_j^* \in L_\infty^*$ могут содержать *сингулярные составляющие,* и в этом состоит основная проблема получения условий локального минимума в задачах со смешанными ограничениями.

Функционал $\xi \in L_\infty^*[0,T]$ называется *сингулярным,* если существует последовательность множеств $E_k \subset [0,T]$, $mes\, E_k \to 0$, таких что ξ сосредоточен *на каждом* множестве E_k. (Однако это не значит, что он сосредоточен на их пересечении!)

Сингулярные составляющие – крайне «нежелательные» элементы в условиях экстремума, так как они плохо поддаются эффективному описанию.

Смешанные ограничения неравенства *регулярны,* если в любой точке (x,u), удовлетворяющей этим ограничениям, градиенты активных ограничений по управлению $G'_{ju}(x,u)$, $j \in I(x,u)$, где $I(x,u) = \{j \mid G_j(x,u) = 0\}$ – множество активных индексов в данной точке, *позитивно независимы,* т.е. линейно независимы при неотрицательных коэффициентах.

Отметим, что случай *нерегулярных* смешанных ограничений далеко не экзотичен: например, $G(x,u) = x^2 + u^2 \leqslant 1$ в точках $(x,u) = (\pm 1, 0)$. Этот случай остается пока мало исследованным, см. напр. [8].

В регулярном случае, применяя теорему 1, получаем следующие необходимые условия слабого минимума в задаче (3)–(4).

Теорема 2. *Если процесс (x^0,u^0) доставляет слабый минимум, то найдутся множители $\alpha_i \geqslant 0$, β_j, измеримые ограниченные функции $h_j(t) \geqslant 0$, неубывающие функции $\mu_i(t)$, и функция ограниченной вариации $\psi(t)$, такие что набор $(\alpha,\ \beta,\ h_j,\ \mu_i)$ нетривиален, и при этом выполнены:*

условия дополняющей нежесткости $\alpha_i\, F_i(x^0(0), x^0(T)) = 0$,

$d\mu_i(t)\, \Phi_i(x^0(t)) \equiv 0, \qquad h_j(t)\, G_j(x^0(t), u^0(t)) = 0$,

условие стационарности по управлению $\overline{H}_u(x^0(t), u^0(t)) = 0$,

сопряженное уравнение $d\psi(t) = -\overline{H}_x(x^0(t), u^0(t))\, dt$,

и условия трансверсальности $\psi(0) = l'_{x(0)}, \quad \psi(T) = -l'_{x(T)}$.

Здесь $\overline{H} = \psi\, f(x,u) - \sum_i \Phi_i(x)\, \frac{d\mu_i}{dt} - \sum_j h_j G_j(x,u)$ – *расширенная функция Понтрягина,* при этом сопряженное уравнение надо понимать как равенство мер:

$$d\psi(t) = -\psi\, f'_x(x,u)\, dt - \sum_i \Phi'_{ix}(x)\, d\mu_i - \sum_j h_j G'_{jx}(x,u)\, dt.$$

Эту теорему называют также *локальным принципом максимума.* Далее ее можно применять в качестве базового результата для получения необходимых условий *сильного* минимума, которые формулируются в виде *глобального принципа максимума* [1, 6, 7].

Заметим, что регулярные смешанные ограничения оказались «проще» фазовых(!), так как их вклад в формулировку условий оптимальности дается в терминах обычных функций (а не мер).

Теорема 1 применима и в задачах с управляемой системой *интегральных* уравнений типа Вольтерры [2]. Нам представляется интересным ее применение и в других классах оптимизационных задач.

Настоящий доклад основан на совместных работах с Н.П. Осмоловским.

Список литературы

1. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. 168 с.
2. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations subject to state and mixed constraints // SIAM J. on Control and Optimization. 2014. Vol. 52, No. 6. P. 3437–3462.
3. Dmitruk A., Osmolovskii N. A General Lagrange Multipliers Theorem // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (CNSA-2017). IEEE, 2017.
4. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. A General Lagrange Multipliers Theorem and Related Questions // Control Systems and Mathematical Methods in Economics /Feichtinger, et al. Eds. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 2018, Vol. 687. P. 165–194.
5. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Lagrange Multipliers Rule for a General Optimization Problem with an Infinite Number of Constraints // Recent Advances of the Russian Operations Research Society / A. Vasin and F. Aleskerov Eds. Cambridge Scholars Publishing, 2020. P. 212–232.
6. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Proof of the maximum principle for a problem with state constraints by the v-change of time variable // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B. 2019. Vol. 24, No. 5. P. 2189–2204.
7. Дмитрук А.В. Вариации типа v-замены времени в задачах оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями // Известия РАН. Сер. Мат. 2023. Т. 87, Вып. 4. С. 91–132.
8. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Local Minimum Principle for Optimal Control Problems with Mixed Constraints: the Nonregular Case // Applied Math. and Optimization. 2023. Vol. 88, No. 1 (40 pages).